13 Аритметички и геометријски низови (06.06.2020.)

17. Три природна броја, која представљају прва три члана геометријског низа обележимо са b_1, b_2 и b_3. Пошто је други члан за један већи од првог, други члан можемо изразити:

$$b_2 = b_1 + 1$$
$$b_2 = b1 \cdot q$$

где је q количник геометријског низа. Тада важи:

$$q = \frac{b_2}{b_1}$$
$$q = \frac{b_1 + 1}{b_1}$$
$$q = 1 + \frac{1}{b_1}$$

b_1, b_2 и b_3 су природни бројеви, и важи $b_2 = b_1 + 1$ тада мора да буде $q > 1$. Нека је $b_1 = n, n \in \mathbb{N}$, на основу претходног важи:

$$q = 1 + \frac{1}{b_1} = 1 + \frac{1}{n}$$

Како су $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{N}$, $b_2 = b_1 + 1$ и $q = 1 + \frac{1}{n}$ тада је јасно да мора $q \in \mathbb{N}$ и да је $q = 2$. Дакле ако q уврстимо у $q = 1 + \frac{1}{b_1}$ добијамо да је $b_1 = 1$. Коначно трећи члан тог низа је:

$$b_3 = b_1 \cdot q^2 = 1 \cdot 2^2 = 4$$

Одговор под (Б).

18. Из услова задатка имамо да за збир три узастопна члана геометријске прогресије важи

$$b_1 + b_2 + b_3 = 93 \tag{1}$$

и да та три броја представљају први, други и седми члан аритметичког низа тј. a_1, a_2 и a_7. Како исти бројеви представљају и геометријски и аритметички низ ($b_1 = a_1, b_2 = a_2, b_3 = a_7$) тада важи:

$$b_1 = a_1 \tag{2}$$
$$b_1 \cdot q = a_1 + d \tag{3}$$
$$b_1 \cdot q^2 = a_1 + 6d \tag{4}$$

Искористимо да је $b_1 = a_1$, тада се једначине (3) и (4) трансформишу у

$$a_1 \cdot (q-1) = d \tag{5}$$
$$a_1 \cdot (q^2-1) = 6d \tag{6}$$

Дељењем једначине (6) са једначином (5) добијамо:

$$\frac{\cancel{a}(q^2-1)}{\cancel{a}(q-1)} = \frac{6\cancel{d}}{\cancel{d}}$$
$$\frac{\cancel{(q-1)}(q+1)}{\cancel{q-1}} = 6$$
$$q = 5$$

Заменом $q = 5$ у једначину (1) добијамо да је

$$b_1 + b_2 + b_3 = 93$$
$$b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 93$$
$$31 \cdot b_1 = 93$$
$$b_1 = 3 \text{ односно } a_1 = 3$$

Тада је производ:

$$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = b_1 \cdot b_1 \cdot q \cdot b_1 \cdot q^2 = (b_1 \cdot q)^3 = (3 \cdot 5)^3 = 3375$$

Одговор под (В).

19. Из услова задатка имамо да су бројеви a, b, c узастопни чланови растућег геометријског низа а бројеви $a, b, c-1$ узастопни чланови аритметичког низа, дакле важи да је:

$$a = a \tag{7}$$
$$a \cdot q = a + d \tag{8}$$
$$a \cdot q^2 = a + 2d + 1 \tag{9}$$

Трансформишимо једаначине (8) и (9) у следеће:

$$a \cdot (q-1) = d \tag{10}$$
$$a \cdot (q^2-1) = 2d+1 \tag{11}$$

Дељењем једначине (11) са једначином (10) добијамо:

$$\frac{\cancel{a}(q^2-1)}{\cancel{a}(q-1)} = \frac{2d+1}{d}$$
$$\frac{\cancel{(q-1)}(q+1)}{\cancel{q-1}} = 2+\frac{1}{d}$$
$$q = 1+\frac{1}{d}$$

заменом добијеног q у (10) добијамо:

$$a \cdot (1+\frac{1}{d}-1) = d$$
$$\frac{a}{d} = d$$
$$a = d^2$$

Из услова задатка имамо да је:

$$a+b+c = 19$$
$$a+a+d+a+2d+1 = 19$$
$$3(a+d) = 18$$
$$a+d = 6$$

Заменом $a = d^2$ у претходну једначину добијамо квадратну једначину:

$$d^2+d-6 = 0$$

Решења ове квадратне једначине су $d = 2$ и $d = -3$. Решење $d = -3$ одбацујемо јер тада низ није растући. Како је $d = 2$ тада q и a добијамо из једнакости

$$q = 1+\frac{1}{d} = \frac{3}{2} \text{ и } a = 2^2 = 4$$

Производ тих чланова је:

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot a \cdot q \cdot a \cdot q^2 = (a \cdot q)^3 = \left(4 \cdot \frac{3}{2}\right)^3 = 216$$

Одговор под (Г).

20. Из услова задатка имамо да су бројеви a, b, c узастопни чланови растућег аритемтичког низа а бројеви $a, b, c+3$ узастопни чланови геометријског низа, дакле важи да је:

$$a = a \tag{12}$$
$$a \cdot q = a + d \tag{13}$$
$$a \cdot q^2 = a + 2d + 3 \tag{14}$$

Трансформишимо једаначине (13) и (14) у следеће:

$$a \cdot (q-1) = d \tag{15}$$
$$a \cdot (q^2-1) = 2d + 3 \tag{16}$$

Дељењем једначине (16) са једначином (15) добијамо:

$$\frac{\cancel{a}(q^2-1)}{\cancel{a}(q-1)} = \frac{2d+3}{d}$$
$$\frac{\cancel{(q-1)}(q+1)}{\cancel{q-1}} = 2 + \frac{3}{d}$$
$$q = 1 + \frac{3}{d}$$

заменом добијеног q у (15) добијамо:

$$a \cdot (1 + \frac{3}{d} - 1) = d$$
$$a \cdot \frac{3}{d} = d$$
$$a = \frac{d^2}{3}$$

Из услова задатка имамо да је:

$$a + b + c = 10$$
$$a + a + d + a + 2d = 10$$
$$3a + 3d = 10$$

Заменом $a = \frac{d^2}{3}$ у претходну једначину добијамо квадратну једначину:

$$d^2 + 3d - 10 = 0$$

Решења ове квадратне једначине су $d = 2$ и $d = -5$. Решење $d = -5$ одбацујемо јер тада низ није растући. Како је $d = 2$ тада a добијамо из једнакости

$$a = \frac{d^2}{3} = \frac{4}{3}$$

Коначно, збир квадрата тих чланова је:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= \\ a^2 + (a+d)^2 + (a+2d)^2 &= \\ a^2 + a^2 + 2ad + d^2 + a^2 + 4ad + 4d^2 &= \\ 3a^2 + 6ad + 5d^2 &= \\ 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 6 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2 + 5 \cdot 4 &= \frac{124}{3} \end{aligned}$$

Одговор под (Б).

14 Комбинаторика

1. Скуп $S = \{$ т, е, х, н, и, к, а $\}$ има седам елемената $(n = 7)$. Како се ради о пермутацијама без понављања при чему треба искористити све елементе скупа S тада је решење:

$$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

Одговор под (Д).

2. Скуп $S = \{$ т, е, х, н, и, к, а $\}$ има седам елемената $(n = 7)$. Како треба оформити трословну реч (бирамо тројку елемената из S, $k = 3$) без понављања елемената S при чему је редослед елемената битан тада се ради о варијацијама без понављања тј.:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cancel{\cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Одговор под (Б).

3. Скуп $S = \{$ т, е, х, н, и, к, а $\}$ има седам елемената $(n = 7)$. Како треба оформити трословну реч (бирамо тројку елемената из S, $k = 3$) са могућим понављањем елемената S при чему је редослед елемената битан тада се ради о варијацијама са понављањем тј.:

$$\overline{V}_n^k = n^k = 7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$$

Одговор под (В).

4. Скуп $S = \{$ т, е, х, н, и, к, а $\}$ има седам елемената ($n = 7$). Како треба оформити све трочлане подскупове (бирамо по три елемента из S, $k = 3$) без могућности понављања елемената S при чему је редослед елемената небитан тада се ради о комбинацијама без понављања:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{3 \cdot 2} \cdot 1 \cdot \cancel{4!}} = 35$$

Одговор под (А).

5. Скуп свих цифара $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ има десет елемената ($n = 10$). Треба да израчунамо колико има укупно троцифрених бројева у чијем су запису све цифре различите. Прво ћемо израчунати колико има укупно троцифрених бројева не водећи рачуна о њиховој исправности. Пошто бирамо тројку елемената из S, $k = 3$, елементи из S се не могу понављати и редослед елемената је битан тада се ради о варијацијама без понављања. Укупан број таквих троцифрених бројева је:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Међу ових 720 бројева имамо оне који нису исправни јер почињу са цифром нула, зато од укупног броја 720 треба одузети такве. Обележимо са x_i и-ту цифру троцифреног броја ($i = 1, 2, 3$). На првом месту x_1 можемо изабрати само један елемент скупа S а то је 0. На друго место x_2 можемо изабрати преосталих 9 елемената скупа S и на треће место x_3 можемо изабрати 8 елемената скупа S јер се цифре не смеју понављати. Укопно троцифрених бројева који почињу са цифром 0 је дакле $1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$. Коначно, укупан број троцифрених бројева у чијем су запису све цифре различите је: $720 - 72 = 648$.

Одговор под (В).

6. Како из скупа свих цифара треба изузети цифре 0 и 1 тада скуп S изгледа $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и има осам елемената ($n = 8$). Како треба оформити четвороцифрене бројеве (бирамо четворку елемената из S, $k = 4$) са могућим понављањем елемената S при чему је редослед елемената битан тада се ради о варијацијама са понављањем тј.:

$$\overline{V}_n^k = n^k = 8^4 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$$

Одговор под (Г).

7. Скуп свих непарних цифара је $S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (има пет елемената $n = 5$). Како треба оформити петоцифрене бројеве (бирамо петорку елемената из S, $k = 5$), при чему елеменате из S није могуће понављати и при чему је редослед елемената битан тада се ради о варијацијама без понављања тј.:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-5)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Одговор под (Г).

8. Скуп свих парних цифара је $S = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ (има пет елемената $n = 5$). Треба да израчунамо колико има укупно петоцифрених бројева у чијем су запису све цифре парне. Прво ћемо израчунати колико има укупно петоцифрених бројева не водећи рачуна о њиховој исправности. Пошто бирамо петорку елемената из S, $k = 5$, елементи из S се могу понављати и редослед елемената је битан тада се ради о варијацијама са понављањем. Укупан број таквих петоцифрених бројева је:

$$\overline{V}_n^k = n^k = 5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$$

Међу ових 3125 бројева имамо оне који нису исправни јер почињу са цифром нула, зато од укупног броја 3125 треба одузети такве. Обележимо са x_i и-ту цифру петоцифреног броја ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). На првом месту x_1 можемо изабрати само један елемент скупа S а то је 0. На друго место x_2 можемо изабрати 5 елемената скупа S јер се цифре могу понављати, и на треће,четврто и пето место x_3, x_4, x_5 можемо изабрати по 5 елемената скупа S јер се цифре могу понављати. Укопно петоцифрених бројева који почињу са цифром 0 а преостале цифре припадају скупу S је дакле $1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$. Коначно, укупан број петоцифрених бројева у чијем су запису све цифре парне је: $3125 - 625 = 2500$.

Одговор под (Б).

Милош Вучић
mvucic@mas.bg.ac.rs