13 Аритметички и геометријски низови (30.05.2020.)

5. Ако са a_n обележимо n-ти члан аритметичког низа, њега можемо добити помоћу формуле:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \tag{1}$$

где је a_1 први члан тог низа а d је разлика за коју низ расте (уколико је $d > 0$) или опада (уколико је $d < 0$). Сума првих n чланова аритемтичког низа је:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \tag{2}$$

Користећи формулу (1) трећи и четврти члан низа можемо записати:

$$a_3 = a_1 + 2d \text{ и } a_4 = a_1 + 3d$$

Тада важи да је:

$$\begin{aligned} a_3 + a_4 &= 7 \\ a_1 + 2d + a_1 + 3 &= 7 \\ 2a_1 + 5d &= 7 \end{aligned}$$

Суму првих шест чланова аритметичког низа добијамо помоћу формуле (2)

$$S_6 = 3(2a_1 + 5d)$$

Дакле, како је $2a_1 + 5d = 7$ заменом у претходни израз добијамо:

$$S_6 = 3(2a_1 + 5d) = 3 \cdot 7 = 21$$

Одговор под (Г).

6. Као и у претходном задатку користићемо формуле (1) и (2). Из услова задатка имамо да је:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 4a_3 \\ a_{12} &= a_4 + 12 \end{aligned}$$

Дакле, користећи формулу (1) налазимо:

$$
\begin{aligned}
a_{12} &= a_4 + 12 \\
\cancel{a_1} + 11d &= \cancel{a_1} + 3d + 12 \\
8d &= 12 \\
d &= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Како је $a_{11} = 4a_3$ добијамо:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= 4a_3 \\
a_1 + 10d &= 4a_1 + 8d \\
3a_1 - 2d &= 0 \\
3a_1 - \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} &= 0 \\
\text{тј. } a_1 &= 1
\end{aligned}
$$

Сада можемо израчунати:

$$a_{101} = a_1 + 100d = 1 + 150 = 151$$

Одговор под (Д).

7. Збир првих пет чланова низа са непарним индексима је:

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 35$$

док је збир првих првих пет чланова са парним индексима:

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 50$$

Користећи формулу (1) трансформишимо претходно и формирајмо систем једначина:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 35 \\ a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + 2d + a_1 + 4d + a_1 + 6d + a_1 + 8d = 35 \\ a_1 + d + a_1 + 3d + a_1 + 5d + a_1 + 7d + a_1 + 9d = 50 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a_1 + 20d = 35 \\ 5a_1 + 25d = 50 \end{cases}$$

Множењем прве једначине са -1 и додавањем другој добијамо:

$$5d = 15 \text{ тј. } d = 3$$

Користећи да је $d = 3$ добијамо

$$5a_1 + 60 = 35 \text{ тј. } a_1 = -5$$

Тада је други члан низа:

$$a_2 = a_1 + d = -5 + 3 = -2$$

Одговор под (B).

8. Ако су $a_1, a_2, ..., a_{100}$ чланови аритемтичке прогресије, тада збир последњих педесет датих чланова можемо представити као разлику збира свих сто чланова и збира првих педесет чланова, односно:

$$a_{51} + a_{52} + ... + a_{100} = S_{100} - S_{50}$$

Искористимо то у условима задатка:

$$a_{51} + a_{52} + ... + a_{100} = 3(a_1 + a_2 + ... + a_{50})$$

$$S_{100} - S_{50} = 3 \cdot S_{50}$$

$$\text{тј. } S_{100} = 4 \cdot S_{50}$$

Користећи формулу (2) добијамо:

$$\frac{100}{2}(2a_1 + 99d) = 4 \cdot (\frac{50}{2} \cdot (2a_1 + 49d))$$
$$100a_1 + 4950d = 200a_1 + 4900d$$
$$100a_1 = 50d$$

Како је $a_1 = 3$ имамо:

$$50d = 300 \text{ тј. } d = 6$$

Одговор под (A).

9. Представимо други и шести члан аритметичког низа помоћу петог члана аритметичког низа:

$$a_2 = a_5 - 3d \text{ и } a_6 = a_1 + 5d$$

Како је $a_5 = 4$, збир квадрата другог и шестог члана је:

$$a_2^2 + a_6^2 = (4 - 3d)^2 + (4 + d)^2 = 16 - 24d + 9d^2 + 16 + 8d + d^2 = 10d^2 - 16d + 32$$

Да би израчули вредност разлике низа за коју је збир квадрата другог и шестог члана најмања, треба да одредимо d за које добијена квадратна функција $10d^2 - 16d + 32$

има најмању вредност. Дакле користићемо формулу за одређивање екстрема квадратне функције

$$X_t = -\frac{b}{2a}$$

У нашем случају:

$$X_t = -\frac{-16}{2 \cdot 10} = \frac{8}{10} = 0,8$$

Одговор под (Б).

10. Како у овом задатку за сваки природан број n важи да је збир првих n чланова аритметичког низа једнак $5n^2 - 4n$ тада имамо:
За $n = 1$:

$$a_1 = 5 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 1$$

за $n = 2$:

$$a_1 + a_2 = 5 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 12$$

па на основу претходног имамо да је $a_2 = 11$, док је $d = 10$. Можемо на основу (1) израчунати да је $a_3 = a_1 + 2d = 1 + 20 = 21$ Производ прва три члана овог низа:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 5 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 1 \cdot 11 \cdot 21 = 231$$

Одговор под (Г).

11. Ако са b_n обележимо n-ти члан геометријског низа, са q обележимо количник геометријског низа тада за сваки геометријски низ важи:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \tag{3}$$

Збир првих n чланова геометриског низа је:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1 \tag{4}$$

Из услова задатка имамо да је $b_1 = \sqrt{2}$ и $b_2 = \sqrt[3]{2}$, тада на основу (3) можемо израчунати:

$$b_2 = b_1 q$$

$$\sqrt{2}\cdot q=\sqrt[3]{2}$$
$$q=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}=2^{-\frac{1}{6}}$$

Дакле,

$$b_4=b_1q^3=\sqrt{2}\cdot(2^{-\frac{1}{6}})^3=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}=2^0=1$$

Одговор под (А).

12. Из услова задатка поставимо систем једначина:

$$\begin{cases} b_1+b_3=15 \\ b_2+b_4=30 \end{cases}$$

Користећи формулу (3) имамо:

$$\begin{cases} b_1+b_1q^2=15 \\ b_1q+b_1q^3=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1(1+q^2)=15 \\ b_1q(1+q^2)=30 \end{cases}$$

Уколико другу једначину поделимо са првом добијамо да је $q=2$.
Из формуле (4) имамо:

$$S_n=\frac{b_1\cdot(q^n-1)}{q-1}$$
$$\frac{3\cdot(2^n-1)}{2-1}=765$$
$$3\cdot 2^n-3=765$$

Дакле, $n=2$. Одговор под (Г).

13. Пошто бројеви представљају чланове растуће геометријске прогресије ($q>1$) обележимо их са b, bq и bq^2. Из услова задатка формирајмо систем:

$$\begin{cases} b+bq+bq^2=21 \\ \frac{1}{b}+\frac{1}{bq}+\frac{1}{bq^2}=\frac{7}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b(1+q+q^2)=21 \\ \frac{q^2+q+1}{bq^2}=\frac{7}{12} \end{cases}$$

На основу прве једначине имамо да је $(1+q+q^2)=\frac{21}{b}$, па заменом у другу добијамо:

$$\frac{q^2+q+1}{bq^2}=\frac{7}{12}$$
$$\frac{\frac{21}{b}}{bq^2}=\frac{7}{12}$$
$$b^2q^2=36 \text{ тј. } bq=6$$

Тада је производ тих чланова:

$$b \cdot bq \cdot bq^2 = b^3q^3 = (bq)^3 = 6^3 = 216$$

Одговор под (Б).

14. На основу услова задатка поставимо систем једначина:

$$\begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 = 7 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 7 \\ b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 7 \\ b_1^2(1 + q^2 + q^4) = 21 \end{cases}$$

Запишимо $1 + q + q^2 = \frac{q^3-1}{q-1}$, тада је:

$$1 + q^2 + q^4 = \frac{q^6 - 1}{q^2 - 1} = \frac{(q^3)^2 - 1}{q^2 - 1} = \frac{(q^3 - 1)(q^3 + 1)}{(q - 1)(q + 1)} =$$

$$\frac{\cancel{(q-1)}(q^2 + q + 1)\cancel{(q+1)}(q^2 - q + 1)}{\cancel{(q-1)}\cancel{(q+1)}} = (q^2 - q + 1)(q^2 + q + 1)$$

Из прве једначине система изразимо $b_1 = 7/(1 + q + q^2)$ и уврстимо у другу, тада добијамо:

$$\left(\frac{7}{1 + q + q^2}\right)^2 (q^2 - q + 1)(q^2 + q + 1) = 21$$

$$\frac{49}{(1 + q + q^2)^{\cancel{2}}}(q^2 - q + 1)\cancel{(q^2 + q + 1)} = 21$$

$$49(q^2 - q + 1) = 21(q^2 + q + 1)$$

Решавањем ове квадратне јендачине добијамо $q = 2$ и $q = 1/2$. Пошто је у услову задатка наглашено да се ради о растућој геометријској прогресији бирамо $q = 2$. Заменом у прву једначину добијамо:

$$b_1 = \frac{7}{1 + 2 + 4} = 1$$

Десети члан те прогресије је:

$$b_{10} = b_1 \cdot q^9 = 1 \cdot 2^9 = 512$$

Одговор под (В).

15. Збир свих чланова опадајућег геометријског низа је:

$$S_\infty = \frac{b_1}{1 - q}, \text{ за } |q| < 1 \tag{5}$$

Из првог услова задатка имамо:

$$b_1 + b_2 + ... + b_n + ... = \frac{3}{2}$$

$$\frac{b_1}{1-q} = \frac{3}{2} \text{ тј. } b_1 = \frac{3}{2}(1-q)$$

док из другог:

$$b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 + ... = \frac{1}{8}$$

$$b_1^2(1 + q^2 + q^4 + ...) = \frac{1}{8}$$

Означи sa $Q = q^2$ тада претходну једначину трансформишњмо у:

$$b_1^2(1 + Q + Q^2 + ...) = \frac{1}{8}$$

користећи (5) добијамо:

$$\frac{b_1^2}{1-Q} = \frac{b_1^2}{1-q^2} = \frac{1}{8}$$

На основу

$$b_1 = \frac{3}{2}(1-q) \text{ и } \frac{b_1^2}{1-q^2} = \frac{1}{8}$$

добијамо да је:

$$\frac{(\frac{3}{2}(1-q))^2}{1-q^2} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{\frac{9}{4}(1-q)^{\cancel{2}}}{\cancel{(1-q)}(1+q)} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{18(1-q)}{1+q} = 1$$

$$19q = 17 \text{ тј. } q = \frac{17}{19}$$

Увраштавањем добијеног q можемо израчунати:

$$b_1 = \frac{3}{2}(1-q) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{17}{19}\right) = \frac{3}{19}$$

Други члан тог низ је:

$$b_2 = b_1 \cdot q = \frac{3}{19} \cdot \frac{17}{19} = \frac{51}{361}$$

Одговор под (Д).

16. Користећи формулу (5) и услове задатка имамо:

$$b_1 + b_2 + ... + b_n + ... = 9$$

$$\frac{b_1}{1-q} = 9 \text{ тј. } b_1 = 9(1-q)$$

Уврштавањем претходно добијеног налазимо:

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = \frac{26}{3}$$

$$b_1(1 + q + q^2) = \frac{26}{3}$$

$$9(1-q)(1 + q + q^2) = \frac{26}{3}$$

Уочимо да је $(1-q)(1+q+q^2) = 1-q^3$ и уврстимо га у претходно добијену једначину. Тада је:

$$9(1-q)(1 + q + q^2) = \frac{26}{3}$$

$$9(1-q^3) = \frac{26}{3}$$

$$27(1-q^3) = 26$$

$$q^3 = \frac{1}{27}$$

$$q = \frac{1}{3}$$

Сада можемо израчунати b_1 и b_2

$$b_1 = 9 \cdot (1-q) = 9 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6$$

$$b_2 = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

Производ прва два члана:

$$b_1 \cdot b_2 = 6 \cdot 2 = 12$$

Одговор под (Д).

Милош Вучић
mvucic@mas.bg.ac.rs