12 Аналитичка геометрија у равни (23.05.2020.)

18. Обележимо праву $p : ax + 3y + 4 = 0$, праву $q : 5x + by - 3 = 0$ и круг $k : x^2+y^2-2x+4y-10 = 0$. Једначина кружнице са центром у тачки $C(p, q)$ и полупречником r је: $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$.
Дакле, уколико круг k запишемо у наведеном облику добијамо:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 10 &= 0 \\ (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 10 &= 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 &= 15 \end{aligned}$$

Центар има координате $C(1, -2)$ и налази се у пресеку правих p и q, па уврштавањем $x = 1$ и $y = -2$ у једначине правих p и q добијамо:

$$a \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 4 = 0, \text{ тј. } a = 2 \text{ и}$$
$$5 - 2b - 3 = 0, \text{ тј. } b = 1$$

Тада су једначине правих p и q (записане у експлицитном облику) и њихови коефицијенти правца:

$$p : y = -\tfrac{2x}{3} - \tfrac{4}{3}, \text{ а одговарајући коефицијент правца } k_p = -\tfrac{2}{3} \text{ и}$$
$$q : y = -5x + 3, \text{ а одговарајући коефицијент правца } k_q = -5$$

Угао између правих p и q је одређен са:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{|k_q - k_p|}{1 + k_p k_q}$$

одакле је

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{|-5 - (-\frac{2}{3})|}{1 + (-\frac{2}{3})(-5)} = 1,$$

па је тражени угао

$$\varphi = \mathrm{arctg}(1) = \frac{\pi}{4},$$

тј. одговор под (Б).

19. Права $y = kx + n$ је тангента кружнице $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ ако је испуњен услов

$$(1 + k^2)r^2 = (q - kp - n)^2$$

Коефицијент правца k наше праве је непознат док је $n = 10$. Центар круга има координате $C(0, 0)$ и полупречник $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
Уврштавањем k и n у услов тангентности добијамо:

$$
\begin{aligned}
(1+k^2)r^2 &= (q-kp-n)^2 \\
(1+k^2)\cdot 20 &= (0-k\cdot 0-10)^2 \\
20k^2 &= 80 \\
k^2 &= 4 \\
k &= \pm 2
\end{aligned}
$$

Одговор под (Д).

20. Угао под којим се круг види из тачке M је заправо угао који заклапају тангенте круга конструисане из тачке M. Центар круга има координате $C(0,0)$ а полупречник $r=1$. Означимо са $t_1 : y = k_1x + n_1$ и са $t_2 : y = k_2x + n_2$ тангенте конструисане из тачке M на круг. $M \in t_1$ и $M \in t_2$, па након уврштавања $x=2$ и $y=0$ добијамо да је $0 = 2k_1 + n_1$ или $0 = 2k_2 + n_2$. Заменом добијеног у услов тангентности добијамо:

$$
\begin{aligned}
(1+k^2)r^2 &= (q-kp-n)^2 \\
(1+k^2)\cdot 1 &= (0-0+2k^2)^2 \\
1+k^2 &= 4k^2 \\
3k^2 &= 1 \\
k^2 &= 1/3 \\
k = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} &= \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \\
k_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, k_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}
$$

На основу чега можемо да израчунамо $n_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ и $n_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Дакле, једначине тангети су:

$$
t_1 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}, t_2 : y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}
$$

Угао под којим се круг види из тачке M добија се коришћењем формуле као и у претходном задатку:

$$
\text{tg}\varphi = \frac{|-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}|}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{3})} = \sqrt{3},
$$

па је тражени угао

$$
\varphi = \text{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3},
$$

тј. одговор под (Г).

21. Из једначине кружнице можемо закључити да центар има координате $C(1,1)$ а да је $r = 2$. Уколико праву запишемо у експлицитном облику $y = -2x - m$ уочавамо да је $k = -2$ и $n = -m$. Из услова тангетности добијамо:

$$\begin{aligned} (1+k^2)r^2 &= (q - kp - n)^2 \\ (1+(-2)^2)\cdot 4 &= (1+2+m)^2 \\ 20 &= (3+m)^2 \\ m^2 + 6m - 11 &= 0 \end{aligned}$$

Решавањем добијене квадратне једначине долазимо до решења:

$$m_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+44}}{2} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{5}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{5}$$

Па је збир свих вредности реалног параметра $m = -6$, тј. одговор под (Д).

22. Услов да права $y = kx + n$ буде тангента елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ је:

$$a^2k^2 + b^2 = n^2$$

Сведимо једначину елипсе на облик $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$k^2x^2 + 4^y = 4k^2 \quad / : 4k^2, k \neq 0$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{k^2} = 1$$

Одакле је $a = 2$ и $b = k$. Ако једначину праве $x + y = 3$ запишемо у експлицитном облику $y = -x + 3$ добијамо да је $k_p = -1$ и $n = 3$. Из услова тангентности добијамо:

$$\begin{aligned} a^2k_p^2 + b^2 &= n^2 \\ 4\cdot(-1)^2 + k^2 &= 9 \\ k^2 &= 5 \\ k &= \pm\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Одговор под (В).

23. Запишимо једначину елипсе у следећем облику:

$$2x^2 + 5y^2 = 10 \quad / : 10$$

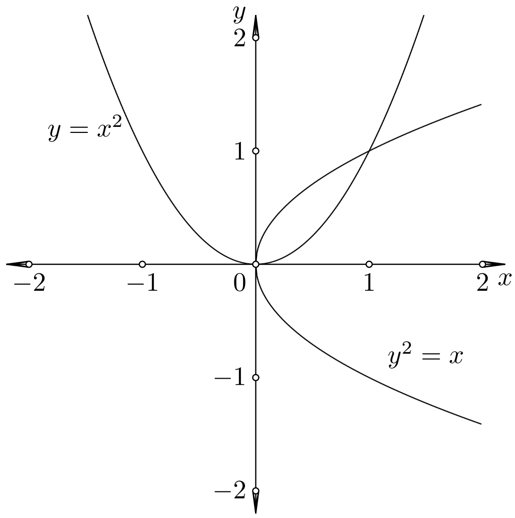
$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$$

одакле закључујемо да је $a = \sqrt{5}$ и $b = \sqrt{2}$. Центар круга има координате $C(0,0)$ и $r = 2$. Из услова да права буде тангента круга добијамо $4 + 4k^2 = n^2$, док из услова да права буде тангента елипсе добијамо $5k^2 + 2 = n^2$. Решавањем система ове две једначине:

$$\begin{cases} 4k^2 - n^2 = -4 \\ 5k^2 - n^2 = -2 \end{cases}$$

налазимо да је $k^2 = 2$ и $n^2 = 12$, па је $n^2 - k^2 = 10$, тј. одговор под (Г).

24. Скицирајмо графике парабола $y^2 = x$ и $y = x^2$.



На основу графика можемо закључити да линеарна функција $y = kx + n$ (која представља заједничку тангенту парабола) мора бити опадајућа, да јој је коефицијент правца k негативан и да она сече негативни део y-осе ($n < 0$). Како је $p = 1/2$ из услова тангентности добијамо $2kn = 1/2$ тј. мора да важи да је $kn = 1$. Једини понуђени одговор који задовољава услове да је $k < 0$, $n < 0$ и да је $kn = 1$ је одговор под (Б).

25. Услов да права $y = kx + n$ буде тангента параболе $y^2 = 2px$ је:

$$p = 2kn$$

Означимо са $t : y = kx + n$ једну тангету параболе из тачке $A(-4, 1)$. Из једначине параболе закључујемо да је $p = 1$, а на основу $A \in t$ добијамо да је $1 = -4k + n$ тј. $n = 1 + 4k$. Увраштавањем израчунатих p и n у услов тангентности добијамо:

$$
\begin{aligned}
2kn &= p \\
2k(1+4k) &= 1 \\
2k+8k^2 &= 1 \\
8k^2+2k-1 &= 0.
\end{aligned}
$$

Решавањем добијене квадратне једначине долазимо до коефицијента правца тангенти:

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{16} = \frac{-2 \pm 6}{16}$$

тј. $k_1 = -\frac{1}{2}$ и $k_2 = \frac{1}{4}$. Сада можемо израчунати $n_1 = 1 + 4 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$ и $n_2 = 1 + \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} = 2$. Угао који заклапају тангенте

$$t_1 : y = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$t_2 : y = \frac{1}{4}x + 2$$

рачунамо по формули:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{|\frac{1}{4} - (-\frac{1}{2})|}{1 + \frac{1}{4} \cdot (-\frac{1}{2})} = \frac{6}{7}$$

па је тражени угао

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{6}{7}\right)$$

тј. одговор под (Г).

13 Аритметички и геометријски низови

1. Означимо два узастопна природна броја са a и b, при чему је $b = a + 1$. Разлика кубова тих бројева је:

$$
\begin{aligned}
b^3 - a^3 &= 91 \\
(a+1)^3 - a^3 &= 91 \\
\cancel{a^3} + 3a^2 + 3a + 1 - \cancel{a^3} &= 91 \\
3a^2 + 3a + 1 &= 91 \\
3a^2 + 3a - 90 &= 0 \\
a^2 + a - 30 &= 0
\end{aligned}
$$

Решавањем квадратне једначине добијамо:

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2}$$

Решење $a = -6$ ове квадратне једначине одбацујемо јер a мора бити природан број. Дакле, $a = 5$ и $b = 6$ па је $a \cdot b = 30$. Одговор под (Б).

2. Означимо три узастопна природна броја са a, b и c, при чему је $b = a+1$ и $c = a+2$. Збир квадрата три узастопна природна броја је:

$$\begin{aligned} a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 &= 110 \\ a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 &= 110 \\ 3a^2 + 6a + 5 &= 110 \\ 3a^2 + 6a - 105 &= 0 \\ a^2 + 2a - 35 &= 0 \end{aligned}$$

Решавањем квадратне једначине добијамо:

$$a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+140}}{2} = \frac{-2 \pm 12}{2}$$

Решење $a = -7$ ове квадратне једначине одбацујемо јер a мора бити природан број. Дакле, $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$ па је $a + b + c = 18$. Одговор под (В).

3. Означимо три узастопна парна природна броја са a, b и c, при чему је $b = a + 2$ и $c = a + 4$. Збир квадрата три узастопна парна природна броја је:

$$\begin{aligned} a^2 + (a+2)^2 + (a+4)^2 &= 200 \\ a^2 + a^2 + 4a + 4 + a^2 + 8a + 16 &= 200 \\ 3a^2 + 12a + 20 &= 200 \\ 3a^2 + 12a - 180 &= 0 \\ a^2 + 4a - 60 &= 0 \end{aligned}$$

Решавањем квадратне једначине добијамо:

$$a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+240}}{2} = \frac{-4 \pm 16}{2}$$

Решење $a = -10$ ове квадратне једначине одбацујемо јер a мора бити природан број. Дакле $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$ па је $a + b + c = 24$. Одговор под (Г).

4. Ако са a_n обележимо n-ти члан аритметичког низа, њега можемо добити помоћу формуле:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

где је a_1 први члан тог низа а d је разлика за коју се низ повећава(уколико је $d > 0$) или смањује(уколико је $d < 0$). Поставимо систем једначина:

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = 16 \\ a_5 + a_7 = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2d + a_1 + 5d = 16 \\ a_1 + 4d + a_1 + 6d = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 7d = 16 \\ 2a_1 + 10d = 22 \end{cases}$$

Уколико први једначину помножимо са -1 и додамо другој, добијамо да је:

$$3d = 6, \text{ тј. } d = 2$$

Сада на основу прве једначине можемо израчунати и a_1:

$$2a_1 + 14 = 16$$
$$2a_1 = 2 \text{ тј. } a_1 = 1$$

Па је

$$a_{20} = a_1 + 19d = 39$$

. Одговор под (В).

Милош Вучић
mvucic@mas.bg.ac.rs