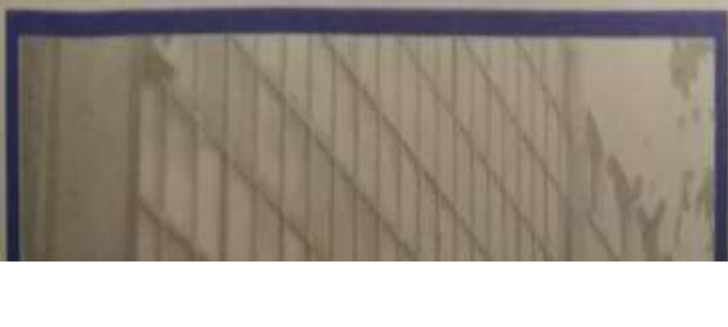
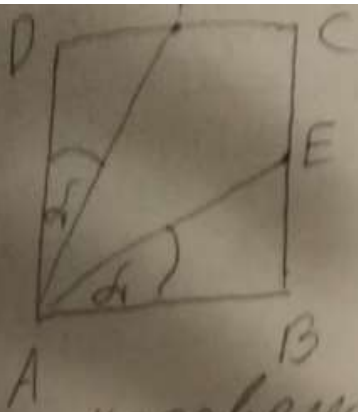
НАПОМЕНА: Списак коригованих грешака приложен пре 14 дана односи се на издање из 2015. године и исте су у издању из 2018 исправљене (неки ђаци имају старије издање а неки новије). Међутим, у издању из 2018 такође постоји понека грешка која у оном из 2015. није ни примећена – у 11-ом поглављу је то случај са нпр. задацима 11.5 (где је тачан одговор Д) и 11.16 (где је одговор 24 и нема га међу понуђенима).

У вези са којим год поглављем (укључујући и тестове на крају), да имају било каквих питања – матуранти могу бити слободни да их пошаљу на е-адресу apejcev@mas.bg.ac.rs



31.

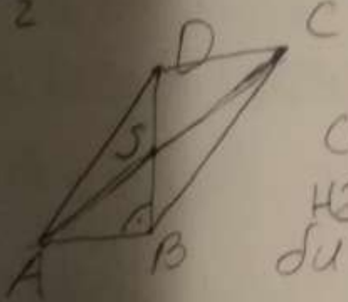


Очито је $\sphericalangle BAE = \sphericalangle FAD$ и њихов тангенс износи $\frac{BE}{AB} = \frac{DF}{AD} = \frac{1}{2}$. Ако тај угао назовемо α, важи $\sphericalangle EAF = 90^\circ - 2\alpha$, па је $tg\sphericalangle EAF = tg(90^\circ - 2\alpha) =$

$$= ctg 2\alpha = \frac{1}{tg 2\alpha} = \frac{1}{\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}} = \frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha} =$$

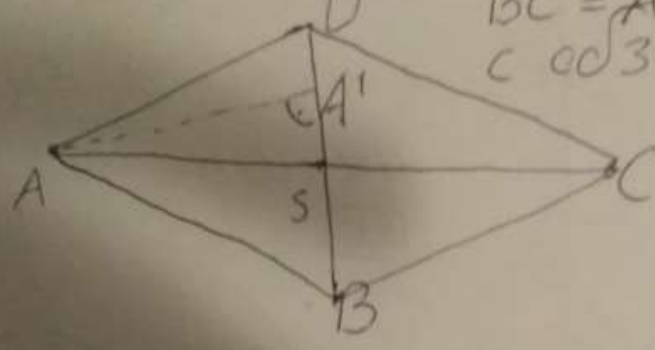
$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$ Д

32.



Ако са S означимо пресек дијагонала, с обзиром на то да се оне полове, биће $AS = 3$ и $BS = 2$, одакле налазимо $AB^2 = AS^2 - BS^2 = 5$ из $\triangle ABS$ на основу Питагорине теореме. Сада директно из $\triangle ABD$ на основу Питагорине теореме налазимо $AD^2 = AB^2 + BD^2 = 5 + 4^2 = 21$, одакле је $AD = \sqrt{21}$ В

10.33.



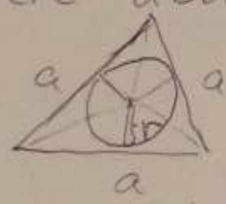
Информација да је $BC=AD$ је сувишна с обзиром на то да ово важи у сваком паралелограму

Ако пресек дијагонала назовемо S, важи $AS=\frac{1}{2}AC=1=AD$, па је $\triangle ASD$ једнакокрак са крацима 1 и основицом $DS=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}$.
Приметимо прво да је $P_{ABS}=P_{ADS}=\frac{1}{2}\frac{BD}{2}\cdot AA'$, где је A' подножје нормале из A на праву BD $\left(BS=DS=\frac{BD}{2}\right)$, па је $P_{ABD}=2\cdot P_{ASD}$. Како је $\triangle ABD\cong\triangle CDB$, то је $P_{CDB}=P_{ABD}$, одакле је $P_{ABCD}=4P_{ASD}$
AA' налазимо као висину једнакокраког $\triangle ASD$: $AA'=\sqrt{AD^2-\left(\frac{SD}{2}\right)^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$. Сада је $P_{ASD}=\frac{1}{2}\cdot DS\cdot AA'=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{16}$, а онда $P_{ABCD}=\frac{\sqrt{15}}{4}$ Г

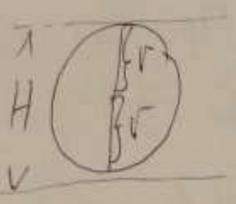
11 СТЕРЕОМЕТРИЈА

11.1 Означимо дужину основне ивице призме са a и висину са H. Ако посматрамо пресек призме и равни паралелне њеним основама која пролази кроз центар лопте, закључујемо да је њен полупречник r једнак полупречнику круга уписаног у једнакостранични троугао ивице a, тј.

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$



Даље, како лопта додирује обе основе призме, мора бити $2r = H$, односно $H = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Запремина лопте је $V_L = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3}\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^3 \pi = \frac{4}{3}\frac{a^3\pi}{24\sqrt{3}} = \frac{a^3\pi}{18\sqrt{3}}$, а призме $V_P = B \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{4}$. Дакле, $\frac{V_L}{V_P} = \frac{\frac{a^3\pi}{18\sqrt{3}}}{\frac{a^3}{4}} = \frac{4\pi}{18\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$ (Б)

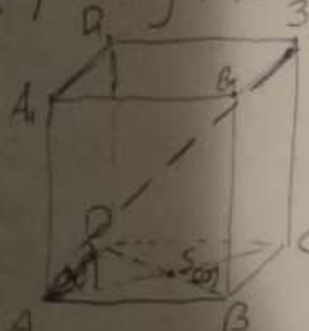


11.2 Запремина квадра на почетку је $6cm \cdot 6cm \cdot 9cm = 216cm^3$, а након скидања тог слоја $2cm \cdot 4cm \cdot 7cm = 56cm^3$, дакле, мања за $160cm^3$, што уједно значи да је уклоњено управо 160 коцкица запремине $1cm^3$. (Б)

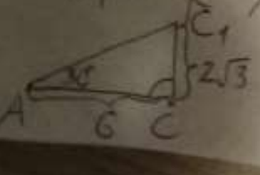
11.3. Након спуштања коцке, запремина простора око ње до нивоа висине 2m износи $(3\cdot4\cdot2-2^3)m^3=16m^3$, а то је мање од запремине укупне воде у базену, која износи $3\cdot4\cdot1.5\,m^3=18m^3$.

Дакле, коцка ће у потпуности бити потопљена и ако са x означимо растојање површине воде од горње стране коцке, управо та запремина воде изнад нивоа коцке, $3\cdot4\cdot x\,m^3$, треба да буде једнака $(18-16)m^3=2m^3$, односно $x=\frac{2}{12}m=\frac{1}{6}m$.
Притом се ниво воде подигао за $\left[\left(2+\frac{1}{6}\right)-1.5\right]m=\frac{2}{3}m$ Г

11.4

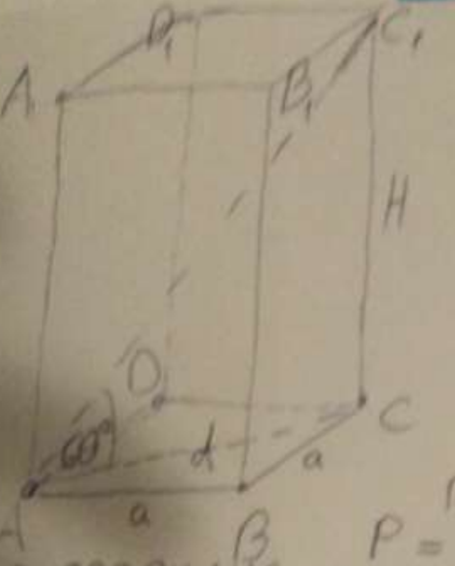


Назовимо квадар као на слици $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Дакле $AC=6m$, $\angle CAC_1=30°$ и $\angle ASB=120°$ под условом да је $AB>BC$ ($\{S\}=AC\cap BD$).
Из $\triangle ACC_1$ је $CC_1=AC\cdot tg\,30°=\frac{6}{\sqrt{3}}m=2\sqrt{3}\,m$, а из $\triangle ABC$ је (очито је $\angle BAS=\angle ABS=30°$ и $\angle ACB=60°$) $BC=\frac{AC}{2}=3m$ и $AB=\frac{AC\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}m$.
Запремина квадра је $AB\cdot BC\cdot CC_1=3\sqrt{3}\cdot3\cdot2\sqrt{3}=54m^3$



(На папирићу са исправљеним грешкама је слово „Б" написано латиницом) Б

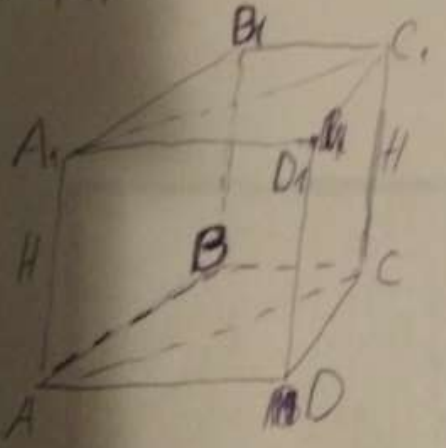
11.5.

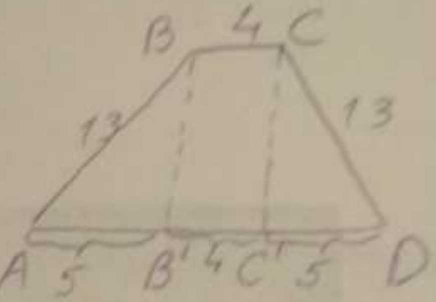


У овом случају је $(\triangle ACC_1)$ висина призме $H = d\sqrt{3} = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\,cm = 3\sqrt{6}\,cm$, а основна ивица $a = \frac{d}{\sqrt{2}} = 3cm$ $(\triangle ABC)$, па је површина $P = 2a^2 + 4aH = (18 + 36\sqrt{6})cm^2 = 18(1+2\sqrt{6})cm^2$ (Д)

Основа правилне четворостране призме је правилни четвороугао, тј. квадрат.

11.6.





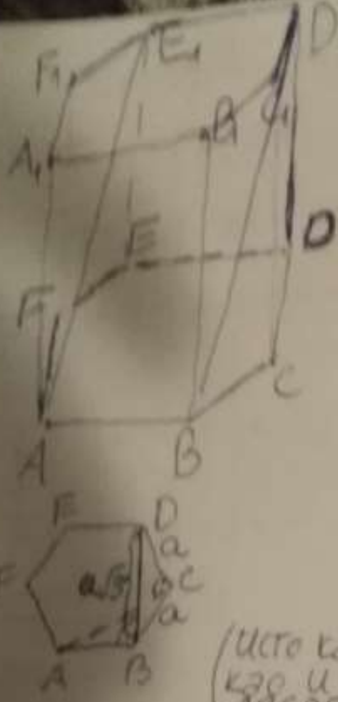
Пресек ACC_1A_1 је правоугаоник и његова површина износи $AC\cdot H$, где је H висина призме, при чему AC налазимо стандардним методама из 10. поглавља:

$AC^2 = AC'^2 + CC'^2 = 9^2 + (13^2 - 5^2) = 81 + 144 = 225$

$\Rightarrow AC = 15$, што значи да је висина пирамиде $H = \frac{150}{15}cm = 10cm$. Површина омотача је

$M = (AB + BC + CD + DA)\cdot H = 44cm\cdot 10cm = 440cm^2$ (Б)

11.7.

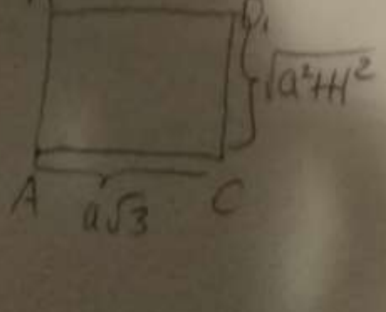


ABD_1E_1 је правоугаоник што се може направити из тога што је права AB, пошто је нормална на DD_1 и (правилни шестоугао) BD, нормална и на раван BDD_1 њима одређену, а онда и на BD_1 као и на сваку другу праву ове равни (исто као што је DD_1 нормално на AB као и на сваку другу праву равни $ABCDEF$)

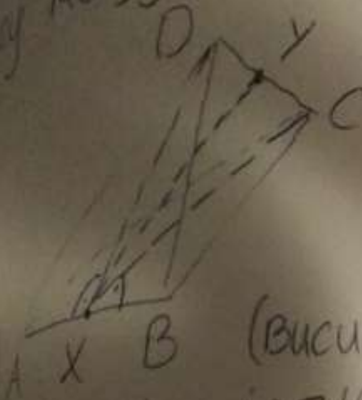
Из $\triangle BDD_1$ имамо $BD_1^2 = BD^2 + DD_1^2 = (a\sqrt{3})^2 + a^2 = 4a^2$, одакле је $BD_1 = AE_1 = 2a$, па је

$P_{ABD_1E_1} = a \cdot 2a = 2a^2$ (A)

11.8. Можемо користити слике из претходног задатка: ACD_1F_1 ће такође бити правоугаоник јер је $AC \perp CD$ и на DD_1 из истих разлога као у претходном задатку, а онда и на раван CDD_1 њима одређену, као и на праву CD_1 и сваку другу праву те равни. Притом је из $\triangle CDD_1$ $CD_1^2 = CD^2 + DD_1^2 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{22}^2 = 25$ $\Rightarrow CD_1 = AF_1 = 5$ и $P_{ACD_1F_1} = AC \cdot CD_1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 5 = 15$ (A)



11.9. Означимо темена тетраедра A, B, C, D – његове пљосни ABC, BCD, CDA, DAB међусобно подударни једнакостранични троуглови ивице $a=\sqrt{2}$



Назовимо средишта дужи AB и CD редом X и Y.

Како је $DX=CX=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ (висина једнакостраничног троугла)

$\triangle CXD$ је једнакокраки са основицом $CD=\sqrt{2}$ cm и крацима $CX=DX=\frac{\sqrt{6}}{2}$ cm $=b$

а XY је његова висина која одговара основици, односно $XY=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{6}{4}-\frac{2}{4}}=1$ Б