14 Комбинаторика

9. Обележимо са x_i и-ту цифру петоцифреног броја $x_1x_2x_3x_4x_5$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Треба израчунати колико има таквих у чијем се запису цифра 0 појављује тачно два пута. Уочимо да цифра 0 никако не може стајати на месту x_1. Дакле могућа места две цифре 0 у петоцифреном броју су следећа:

a) $x_1 00 x4 x_5$

b) $x_1 0 x_3 0 x_5$

c) $x_1 0 x_3 x_4 0$

d) $x_1 x_2 00 x_5$

e) $x_1 x_2 0 x_4 0$

f) $x_1 x_2 x_3 00$

при чему све остале цифре броја могу бити неке из скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и могу се понављати. Ако посматрамо случај a) можемо закључити да оваквих петоцифрених бројева има $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. Ово важи и за остале случајеве којих укупно има 6. Дакле, укупан број петоцифрених бројева у чијем се запису цифра 0 појављује тачно два пута: $6 \cdot (9 \cdot 9 \cdot 9) = 6 \cdot 9^3 = 4374$

Одговор под (B).

10. Обележимо са x_i и-ту цифру шестоцифреног броја $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Одредимо прво број шестоцифрених бројева чија је цифра x_1 непарана. Шестоцифрен број изгледа НПНПНП (где је Н - непарна цифра, П - парна цифра) поштијући да непарне и парне цифре долазе наизменично. На прво место x_1 можемо узети било коју непарну цифру док на друго место x_2 можемо ставити било коју парну цифру, ово исто важи за места x_3x_4 и x_5x_6. Дакле, укупно оваквих бројева има: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$.

Размотримо сада случај када је x_1 парна цифра. Тада шестоцифрен број изгледа ПНПНПН (где је Н - непарна цифра, П - парна цифра) поштијући да парне и непарне цифре долазе наизменично. Сада, за водећу цифру x_1 можемо узети било коју парну цифру сем цифре 0, дакле имамо 4 могућности $\{2, 4, 6, 8\}$. На друго место x_2 можемо ставити било коју непарну цифру $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ као и на места x_4x_6. На места x_3x_5 можемо изабрати било које парне цифре $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Дакле, укупно оваквих бројева има: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot 5^5$.

Коначно, шестоцифрених природних бројева у чијем запису парне и непарне цифре долазе наизменично је: $5^6 + 4 \cdot 5^5$.

Одговор под (A).

11. Пошто из шпила треба извући 5 карата међу којима треба да буде тачно два кеца ($k_1 = 2$), преостале 3 карте могу бити било које ($k_2 = 3$). У шпилу се налазе 32 карте и то 4 кеца ($n_1 = 4$) и 28 других карата ($n_2 = 28$). Број начина на који можемо извући тачно два кеца је заправо број комбинација без понављања при чему је редослед елемената небитан. Дакле број начина је:

$$C_{k_1}^{n_1} = \binom{n_1}{k_1} = \frac{n_1!}{(n_1 - k_1)! \cdot k_1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{2! \cdot \cancel{2!}} = 6$$

Број начина на који можемо извући преостале 3 карте је такође број комбинација без понављања при чему је редослед елемената небитан (сада имамо да је $k_2 = 3$ и $n_2 = 28$ јер је у шпилу преостало 28 других карата који нису кечеви):

$$C_{k_2}^{n_2} = \binom{n_2}{k_2} = \frac{n_2!}{(n_2 - k_2)! \cdot k_2!} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot \cancel{25!}}{\cancel{25!} \cdot 3!} = 3276$$

Дакле, укупан број начина да се из шпила од 32 карте (који садржи 4 кеца) извуку тачно 2 кеца је:

$$C_{k_1}^{n_1} \cdot C_{k_2}^{n_2} = \binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2} = \frac{n_1!}{(n_1 - k_1)! \cdot k_1!} \cdot \frac{n_2!}{(n_2 - k_2)! \cdot k_2!} = 6 \cdot 3276 = 19656.$$

Одговор под (Д).

12. Од 2 математичара и 8 инжињера можемо да формирамо петочлану комисију која садржи бар једног математичара на следеће начине:

1. начин: комисија садржи 1 математичара и 4 инжињера

2. начин: комисија садржи 2 математичара и 3 инжињера

Размотримо сада 1. начин. Како се у комисији бира само један математичар њега можемо изабрати на

$$C_1^2 = \binom{2}{1} = 2$$

начина. Број инжињера у комисији је 4 па њих можемо да изаберемо на:

$$C_4^8 = \binom{8}{4} = 70$$

начина. Дакле петочлану комисију са једним математичараом можемо да изаберемо на $2 \cdot 70 = 140$ начина. Размотримо сада 2. случај. Како се у комисији бирају два математичара њих можемо изабрати на

$$C_2^2 = \binom{2}{2} = 1$$

начин. Број инжињера у комисији је 3 па њих можемо да изаберемо на:

$$C_3^8 = \binom{8}{3} = 56$$

начина. Дакле, петочлану комисију са два математичара можемо да изаберемо на $1 \cdot 56 = 56$ начина.

Коначно, петочлана комисија у којој је бар један математичар а остали инжињери се може изабрати на $56 + 140 = 196$ начина.

Одговор под (Д).

13. Укупан број начина на који се Ана, Бојан, Весна, Горан и Даница могу распоредити у врсту тако да Бојан и Горан не буду један до другог ћемо израчунати тако што ћемо од укупног броја начина на који се Ана, Бојан, Весна, Горан и Даница могу распоредити (не водећи рачуна о распореду седења Бојана и Горана) одузети оне случајеве када Горан и Бојан јесу један до другог. Укупан број начина на који се Ана, Бојан, Весна, Горан и Даница могу распоредити у врсту је заправо број пермутација елемената скупа од 5 чланова ($n = 5$) без понављања при чему чему је битан поредак елемената. Дакле, њихов број је:

$$P_n = n! = 5! = 120.$$

Фиксирајмо сада положај Горана и Бојана у врсти тако да Бојан и Горан буду један до другог. Тада врста може да изгледа: ГБ***, *ГБ**, **ГБ*, ***ГБ при чему * може бити неко од Ане, Бојана и Весне. Укупан број оваквих начина је заправо број пермутација елемената скупа од 4 чланова ($n = 4$ јер распоред ГБ посматрамо као један елемент) без понављања при чему чему је битан поредак елемената. Дакле њихов број је:

$$P_n = n! = 4! = 24.$$

Овај број треба удвостручити јер распоред Бојана и Горана може бити не само ГБ већ и БГ (у случају када Бојан и Горан седе један до другог имамо БГ***, *ВГ**, **БГ*, ***БГ). Коначно, укупан број начина на који се Ана, Бојан, Весна, Горан и Даница могу распоредити у врсту тако да Бојан и Горан не буду један до другог је $140 - 2 \cdot 24 = 140 - 48 = 72$.

Одговор под (Г).

14. Из услова задатка имамо да се коефицијенти трећег и четвртог члана развоја $(\sqrt{a} + 1/\sqrt[4]{a})^n$ односе као $1 : 2$. Тада важи:

$$T_{2+1} : T_{3+1} = 1 : 2$$

$$\binom{n}{2} : \binom{n}{3} = 1 : 2$$

$$2\binom{n}{2}=\binom{n}{3}$$

$$\frac{\cancel{2}\cdot n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{2!}\cdot\cancel{(n-2)!}}=\frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{3\cdot 2\cdot\cancel{(n-3)!}}$$

$$6\cdot n(n-1)=n(n-1)(n-2), \text{(n је сигуро различито од 0 и 1)}$$

$$6=n-2$$

$$n=8$$

Средњи члан је заправо четврти члан развоја и он је једнак:

$$\binom{8}{4}\cdot\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{8-4}\cdot\left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^{4}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot a^2\cdot\frac{1}{a}=70a$$

Одговор под (А).

15. За члан у развоју израза $(\sqrt[4]{a^2x}+1/\sqrt[5]{ax^2})^{13}$ који не садржи x важи:

$$T_{k+1}=\binom{13}{k}\cdot x^{13-k}\cdot y^k$$

$$T_{k+1}=\binom{13}{k}\cdot(a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}})^{13-k}\cdot(a^{-\frac{1}{5}}x^{-\frac{2}{5}})^k$$

$$T_{k+1}=\binom{13}{k}\cdot a^{\frac{13-k}{2}}\cdot a^{-\frac{k}{5}}\cdot x^{\frac{13-k}{4}}\cdot x^{-\frac{2k}{5}}$$

$$T_{k+1}=\binom{13}{k}\cdot a^{\frac{65-5k-2k}{10}}\cdot x^{\frac{65-5k-8k}{4}}$$

Како члан не треба да садржи x онда је $65-13k=0$ тј. $k=5$. Коначно, члан који не садржи x је:

$$T_{5+1}=\binom{13}{5}\cdot a^{\frac{65-7\cdot 5}{10}}=\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot a^{\frac{65-35}{10}}=1287a^3$$

Одговор под (В).

16. Биномни коефицијенти прва три члана развоја $(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})^n$ су редом:

$$T_{0+1}=\binom{n}{0}=1$$

$$T_{1+1}=\binom{n}{1}=n$$

$$T_{2+1}=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

.

Из услова да је њихов збир једнак 46 имамо:

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 46$$
$$2 + 2n + n(n-1) = 92$$
$$n^2 + n - 90 = 0$$

Решавајући ову квадратну једначину добијамо $n_1 = -10$ и $n_2 = 9$. $n_1 = -10$ се одбацује јер из услова задатка n мора бити природан број. Дакле, имамо да је члан развоја облика ax^4:

$$T_{k+1} = \binom{9}{k} x^{n-k} y^k = \binom{9}{k} x^{\frac{9-k}{3}} x^{\frac{k}{2}} = \binom{9}{k} x^{\frac{18-2k+3k}{6}} = \binom{9}{k} x^{\frac{18+k}{6}}.$$

Одатле следи да је $\frac{16+k}{4} = 4$ тј. $k = 6$. Коначно,

$$T_{6+1} = \binom{9}{6} x^4 = \frac{9!}{3! \cdot (9-3)!} x^4 = 84x^4$$

Одговор под (В).

17. Коефицијент трећег члана од почетка развоја $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4})^n$ је $\binom{n}{2}$, док је коефицијент трећег члана од краја $\binom{n}{n-2}$. Из услова задатка имамо да је:

$$\cancel{2} \cdot \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{2} \cdot \cancel{(n-2)!}} = 2450$$
$$n^2 - n - 2450 = 0$$

Решавајући ову квадратну једначину добијамо $n_1 = -49$ и $n_2 = 50$. $n_1 = -49$ се одбацује јер из услова задатка n мора бити природан број. Сада је k-ти члан развоја облика:

$$T_{k+1} = \binom{50}{k} \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{50-k} \left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{k}$$
$$T_{k+1} = \binom{50}{k} 3^{\frac{50-k}{4}} 4^{\frac{k}{3}}$$

Да би у развоју били само рациналини чланови мора да важи да је $\frac{50-k}{4}$ и $\frac{k}{3}$ цео број. То се постиже само за $k \in \{6, 18, 30, 42\}$. Дакле, укупан број таквих члановаје је 4.

Одговор под (В).

18. Некаје догађај А - пала је страна са непарним бројем. Тада је вероватноћа догађаја А једнака:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

где је n број свих могућих исхода догађаја А, а m је број повољних исхода догађаја А. Пошто се баца коцкица за игру укупан број могућих исхода је $n = 6$ јер може пасти неки број из скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Укупна број повољних догађаја је $m = 3$ јер су повољни догађају када падне број из скупа $\{1, 3, 5\}$. Дакле, вероватноћа догађаја А је:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Одговор под (Г).

19. Некаје догађај А - извучена је куглица плаве боје. Тада је вероватноћа догађаја А једнака:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{10}$$

јер је укупан број куглица у кутији 10 што је уједно и укупан број могућих исхода $(n = 10)$. Укупан број повољних исхода је $m = 3$ јер се у кутији налазе 3 плаве куглице.

Одговор под (Б).

20. Нека је догађај А-при првом бацању пала је страна са 6 тачака а догађај В-при другом бацању пала је страна са 6 тачака. Треба уочити да су догађаји А и В независни тј. да исход догађаја А не утиче на исход догађаја В па важи:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Вероватноћа догађаја А је $P(A) = 1/6$ јер број повољних догађаја 1 (само онда када на коцкици падне страна са 6 тачака) а број укупних догађаја је 6 (све могућности да на коцкици падне страна са 1,2,3,4,5 или 6 тачака). Исто важи и за догађај В. Дакле,

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Одговор под (Д).

Милош Вучић
mvucic@mas.bg.ac.rs