12 Аналитичка геометрија у равни (16.5.2020.)

1. Тражени коефицијент правца износи $k = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-2}{-3-1} = \dfrac{1}{4}$ (Г).

2. Решавањем система једначина $5x + 2y = 29$, $3y - x = 1$, добијамо $x = 5$, $y = 2$, па је $y - x = -3$ (А).

3. Нека је $q : y = kx + n$. Како је права q паралелна правој p, то значи да имају исти коефицијент правца, односно $k = 2$. С обзиром да тачка M припада правој q, уврштавањем $x = 7$ и $y = 5$ у $q : y = 2x + n$, добијамо y-координату пресека праве q са y-осом, тј. $y_* = n = -9$ (А).

4. Нека је $q : y = kx + n$. Важи $k = -1/1 = -1$, јер је права q нормална на праву p, а коефицијент правца праве p је једнак 1. Уврштавањем $x = 2$ и $y = 1$ у $q : y = -x + n$ следи $n = 3$, па је $q : y = -x + 3$. Када у добијену једначину праве q уврстимо $x = x_*$ и $y = 0$, имамо $0 = -x_* + 3$, односно $x_* = 3$ (Д).

5. Запишимо једначину праве q као $q : y = kx+n$. С обзиром да је права p нормална на праву q, а да је коефицијент правца праве p једнак -1, то је коефицијент правца праве q износи $k = -1/(-1) = 1$. Како q садржи координатни почетак, тј. тачку $(0, 0)$, уврштавањем ове тачке у $q : y = x + n$ добијамо $n = 0$. Дакле, једначина праве q гласи $q : y = x$. Координате x_* и y_* представљају решење система једначина $y = -x+2$, $y = x$, па је $x_* = 1$, $y_* = 1$, односно $x_* + y_* = 2$ (Д).

6. Ако тачку M уврстимо у једначине правих у свим понуђеним одговорима, приметићемо да је једино могуће решење (Г).

7. На основу формуле за рачунање растојања добијамо да је
$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{11}{5} \quad (\text{Б}).$$

8. Нека је $C(x_C, y_C)$ тражена тачка праве l. Пошто је $|AC| = |BC|$, то је и $|AC|^2 = |BC|^2$, па имамо
$$(x_C - 3)^2 + (y_C - 5)^2 = (x_C - 2)^2 + (y_C - 6)^2. \tag{1}$$
Како тачка C припада правој l, важи и $2x_C + y_C - 6 = 0$, односно $y_C = -2x_C + 6$. Заменом овако израженог y_C у (1) и сређивањем израза, добијамо $x_C = 1$, па је $y_C = 4$. Дакле, тражена тачка је $C(1, 4)$ (В).

9. Дату праву означимо са p. Прво ћемо кроз тачку A конструисати праву q која је нормална на праву p. Нека је $q : y = kx + n$, а једначину праве p запишимо у облику $p : \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}$. Како је коефицијент правца праве p једнак $4/5$ и како је $q \perp p$, то је $k = -\frac{1}{4/5} = -5/4$. С обзиром да $A \in q$, уврштавањем $x = -6$ и $y = 4$ у $q : y = -\frac{5}{4}x + n$, добијамо $n = -7/2$. Стога једначина праве q гласи $q : y = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{2}$, а можемо је записати и као $5x + 4y + 14 = 0$. Пројекција тачке A на праву p је пресек правих p и q, који добијамо решавњем система једначина $4x - 5y + 3 = 0$, $5x + 4y + 14 = 0$. Решење тог система је $x = -2$, $y = -1$, па је тражена пројекција $(-2, -1)$ (Д).

10. Означимо дату праву са p. Аналогним поступком као у претходном задатку добијамо једначину праве $q : y = -x+2$, такве да је $q \perp p$ и $A \in q$, као и пројекцију $C(-1, 3)$ тачке A на праву p. Нека је $B(x_B, y_B)$ тачка симетрична тачки A у односу на праву p. То значи да је $|AC| = |BC|$, па слично као у задатку 8 (користећи да $B \in q$) добијамо $x_B = -3$, $y_B = 5$, одакле је $x_B + y_B = 2$ (Г).

11. Једначину датог круга можемо записати као

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 - 14y + 49) - 49 + \frac{521}{9} = 0,$$

односно

$$(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = \frac{1}{9},$$

одакле видимо да су координате центра $x = 3$ и $y = 7$, па је $x + y = 10$ (А).

12. Једначину датог круга можемо записати као

$$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 4,$$

одакле следи да је x-координата центра -1, а полупречник 2, па је тражени збир једнак 1 (Б).

13. Ако једначину датог круга запишемо у облику

$$(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 22,$$

видимо да је центар круга тачка $C(-3, -4)$. Стога је тражено растојање

$$|MC| = \sqrt{(9 + 3)^2 + (1 + 4)^2} = 13 \quad (\text{Г}).$$

14. Полупречник дате кружнице износи $r = \sqrt{2}$, а њен центар је $C_1(-2, 1)$, па је $|CC_1| = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (1 - 5)^2} = 4\sqrt{2}$. Тражени полупречник износи $|CC_1| - r = 3\sqrt{2}$ (В).

15. Означимо центар дате кружнице са $S(x_S, y_S)$, а њен полупречник са r. Тада тачка S представља средиште дужи AB, па је

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3, \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-5+1}{2} = -2.$$

Даље рачунамо

$$|CS| = \sqrt{(3-7)^2 + (-2+6)^2} = 4\sqrt{2},$$

док полупречник r износи

$$r = \frac{|AB|}{2} = \frac{\sqrt{(4-2)^2 + (1+5)^2}}{2} = \sqrt{10}.$$

Тражено растојање је $|CS| - r = \sqrt{2}(4 - \sqrt{5})$ (Г).

16. Заменом $y = x - 2$ у $x^2 + y^2 = 16$ и сређивањем израза добијамо квадратну једначину $x^2 - 2x - 6 = 0$, чија решења $x_1 = 1 + \sqrt{7}$ и $x_2 = 1 - \sqrt{7}$ представљају тражене x-координате пресека праве и круга. Њихов производ је $x_1 x_2 = -6$ (напомена: с обзиром да је по Вијетовим формулама производ решења квадратне једначине једнак слободном члану, без решавања добијене квадратне једначине можемо закључити да је $x_1 x_2 = -6$) (А).

17. Тачке пресека дате праве и кружнице означимо са (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Тада је

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 6. \tag{2}$$

Из једначине праве $2x - 5y + 18 = 0$ следи $x = \frac{5}{2}y - 9$, па заменом $x_1 = \frac{5}{2}y_1 - 9$ и $x_2 = \frac{5}{2}y_2 - 9$ у (2), након квадрирања и сређивања израза добијамо

$$\frac{29}{4}(y_2 - y_1)^2 = 36. \tag{3}$$

Једначину дате кружнице, чији ћемо полупречник означити са r, можемо написати у облику

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = r^2.$$

Разматране тачке пресека задовољавају и једначину праве и једначину кружнице. Ако $x = \frac{5}{2}y - 9$ заменимо у једначину кружнице, након сређивања израза добићемо

$$y^2 - 8y + 20 - \frac{4r^2}{29} = 0,$$

односно квадратну једначину чија су решења (цео израз $20 - \frac{4r^2}{29}$ посматрамо као слободни члан)

$$y_1 = 4 - \sqrt{\frac{4r^2}{29} - 4}, \quad y_2 = 4 + \sqrt{\frac{4r^2}{29} - 4}.$$

Стога је

$$(y_2 - y_1)^2 = 16\left(\frac{r^2}{29} - 1\right)$$

Уврштавањем претходно добијеног израза у (3) имамо $\frac{29}{4}16\left(\frac{r^2}{29} - 1\right) = 36$, одакле је $r = \sqrt{38}$ (В).

Јелена Томановић
jtomanovic@mas.bg.ac.rs