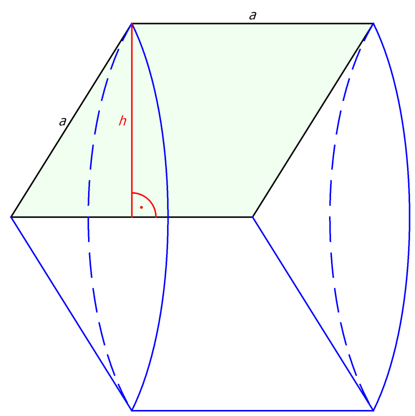
11 Стереометрија (9.5.2020.)

32. Нека је a ивица, а h висина ромба површине $ah = 15cm^2$. Када дати ромб ротира око једне своје странице добија се тело чија се површина састоји од површине омотача ваљка полупречника основе h и висине a, и двеју површина омотача купе полупречника основе h и изводнице a. Стога је тражена површина

$$P = 2h\pi a + 2ha\pi = 4ah\pi = 60\pi cm^2 \quad (\text{А}).$$

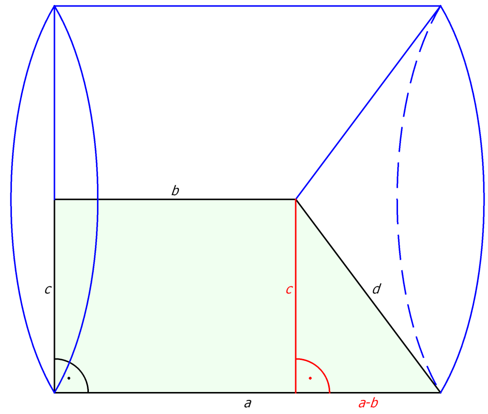


33. Нека је c краћи, а d дужи крак трапеза. Површина тела које се добија када дати трапез ротира око краће основице састоји се од површине омотача ваљка полупречника основе c и висине a, површине круга полупречника c и површине омотача купе полупречника основе c и изводнице d. Дакле,

$$P = 2c\pi a + c^2\pi + cd\pi = c(2a + c + d)\pi.$$

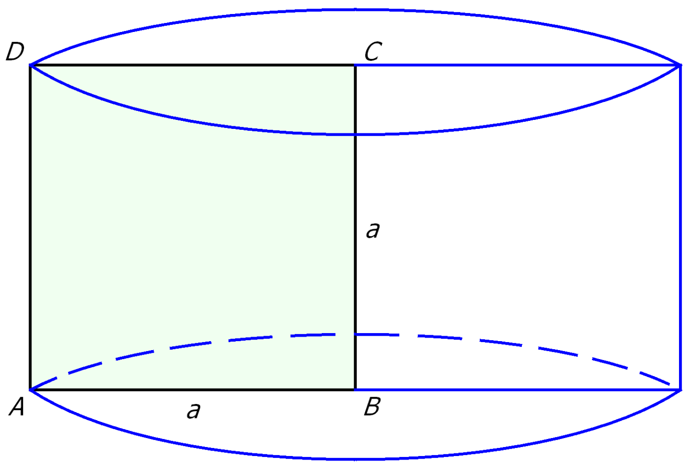
Како је $d^2 = c^2 + (a - b)^2$, следи $d = 13$. Тражена површина је

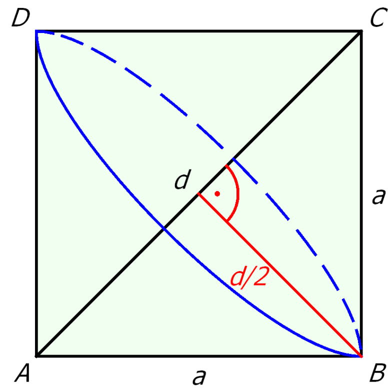
$$P = 12(2 \cdot 20 + 12 + 13)\pi = 780\pi \quad (\text{Д}).$$



34. Страницу датог квадрата означимо са a, а његову дијагоналу са $d(= a\sqrt{2})$. Запремина V_1 једнака је запремини ваљка полупречника основе a и висине a, тј. $V_1 = a^2\pi a = a^3\pi$. Запремина V_2 једнака је запремини двеју купа полупречника основе $d/2$ и висине $d/2$, односно $V_2 = 2\frac{1}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^2\frac{d}{2}\pi = \frac{a^3\pi\sqrt{2}}{6}$. Стога је

$$V_2 : V_1 = \left(\frac{a^3\pi\sqrt{2}}{6}\right) : (a^3\pi) = \sqrt{2} : 6 \quad \text{(A)}.$$





35. V_a је запремина купе висине a и полупречника основе b, па је $V_a = \frac{1}{3}b^2a\pi$, док је V_b запремина купе висине b и полупречника основе a, одакле следи $V_b = \frac{1}{3}a^2b\pi$. Запремина V_c је једнака збиру запремина две купе, обе истог полупречника основе који ћемо означити са r. Ако висину једне од тих купа означимо са h, онда је висина друге $c - h$. Даље је

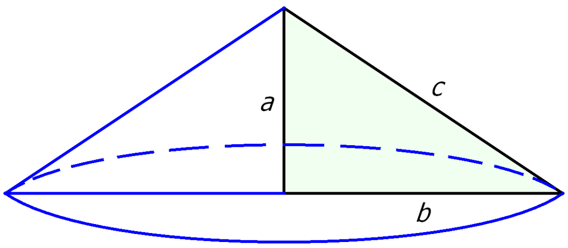
$$V_c = \frac{1}{3}r^2h\pi + \frac{1}{3}r^2(c-h)\pi = \frac{1}{3}r^2c\pi.$$

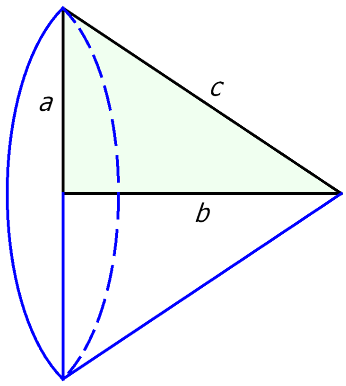
Површину датог правоуглог троугла можемо рачунати као $P = \frac{ab}{2}$, али и као $P = \frac{cr}{2}$, одакле следи $r = \frac{ab}{c}$, па је

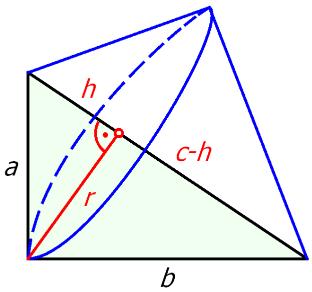
$$V_c = \frac{1}{3}\left(\frac{ab}{c}\right)^2 c\pi = \frac{a^2b^2\pi}{3c}.$$

Сада је

$$\frac{1}{V_a^2}+\frac{1}{V_b^2}-\frac{1}{V_c^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}a^2b^4\pi^2}+\frac{1}{\frac{1}{9}a^4b^2\pi^2}-\frac{1}{\frac{1}{9}\cdot\frac{a^4b^4\pi^2}{c^2}} = \frac{9}{\pi^2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{a^4b^4} = \frac{9}{\pi^2}\cdot\frac{c^2-c^2}{a^4b^4} = 0 \quad \text{(A)}.$$

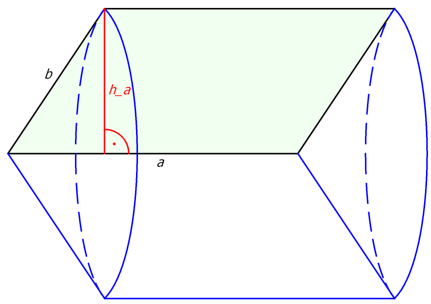






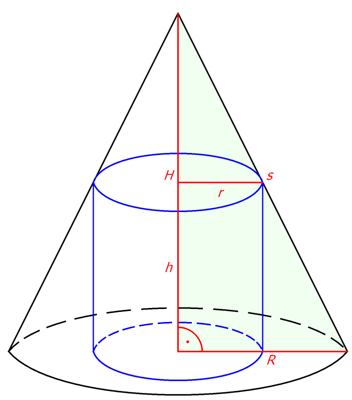
36. Висину паралелограма која одговара страници a означимо са h_a, а висину која одговара страници b означимо са h_b. Нека су V_a и V_b запремине тела која настају ротацијом паралелограма око странице a и око странице b, редом. Тада је $V_a = h_a^2 a\pi$, јер је једнака запремини ваљка полупречника основе h_a и висине a, и аналогно $V_b = h_b^2 b\pi$. Како је површина паралелограма $P = ah_a = bh_b$, следи $h_b = ah_a/b$. Имамо

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{h_a^2 a\pi}{h_b^2 b\pi} = \frac{h_a^2 a}{\frac{a^2 h_a^2}{b^2} b} = \frac{b}{a} \quad (\text{Б}).$$



37. Нека је $R = 3cm$ полупречник основе, $s = 5cm$ изводница, а H висина купе. Тада је $H = \sqrt{s^2 - R^2} = 4cm$. Са $r = 1cm$ означимо полупречник основе ваљка, а његову висину са $h = H/2 = 2cm$. Површина новодобијеног тела једнака је збиру површина омотача ваљка, омотача купе, круга полупречника R умањене за површину круга полупречника r, и круга полупречника r. Збир последње три површине једнак је површини целе купе, јер је збир последње две површине једнак површини круга полупречника R, тј. површини основе купе. Дакле,

$$P = 2r\pi h + R(R+s)\pi = 28\pi cm^2 \quad (\Gamma).$$



38. Нека је H висина дате зарубљене пирамиде, B_a површина основе ивице a, а B_b површина основе ивице b. Запремину зарубљене пирамиде рачунамо по формули

$$V = \frac{H}{3}(B_a + \sqrt{B_a B_b} + B_b),$$

при чему је у овом задатку $B_a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а $B_b = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$. Нека је $h_a = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ висина основе ивице a, а $h_b = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$ висина основе ивице b. Висина пирамиде H спаја пресек висина основа, делећи висине у односу 2:1. Стога је

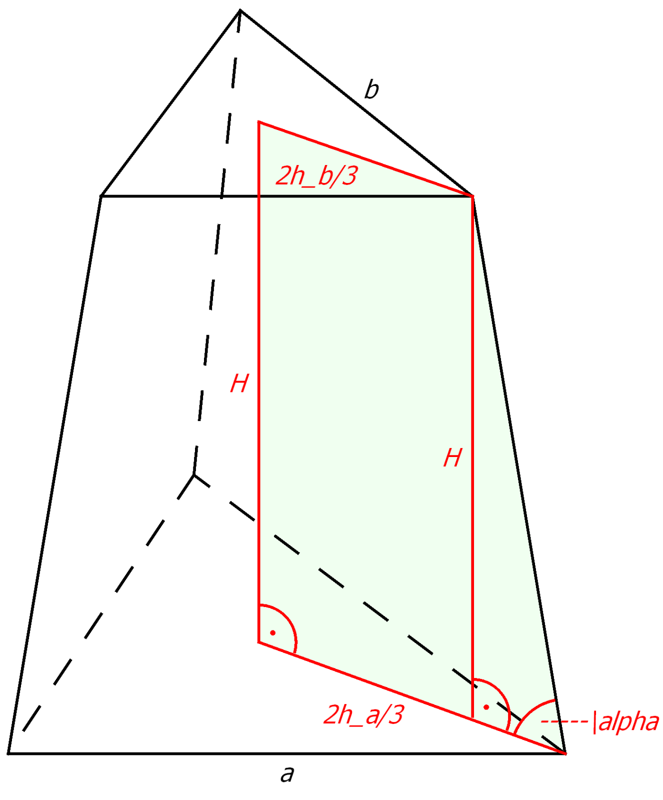
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{H}{\frac{2}{3}h_a - \frac{2}{3}h_b},$$

па је

$$H = \frac{2}{3}(h_a - h_b)\mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}(a-b)\mathrm{tg}\alpha.$$

На крају је

$$V = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}(a-b)\mathrm{tg}\alpha}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{4}} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{12}(a^3 - b^3)\mathrm{tg}\alpha \quad (\Gamma).$$



39. Нека су R и r полупречници основа $(R > r)$, s бочна ивица, а H висина дате зарубљене купе. Како је $r : R : s = 3 : 11 : 17$, можемо записати $r = 3x$, $R = 11x$, $s = 17x$. За висину H важи

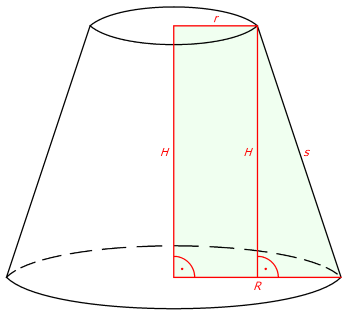
$$H = \sqrt{s^2 - (R-r)^2} = \sqrt{(17x)^2 + (11x - 3x)^2} = 15x.$$

Запремину зарубљене купе рачунамо по формули

$$V = \frac{1}{3}(R^2 + Rr + r^2)H\pi = \frac{1}{3}((11x)^2 + 11x \cdot 3x + (3x)^2)15x\pi = 815x^2\pi,$$

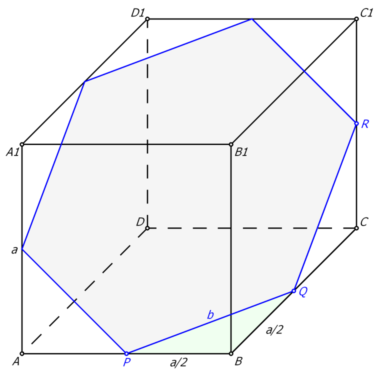
а како је дато $V = 815\pi cm^3$, следи $x = 1cm$. Стога је тражена површина

$$P = (R^2+r^2+(R+r)s)\pi = ((11x)^2+(3x)^2+(11x+3x)17x)\pi = 368x^2\pi = 368\pi cm^2 \quad \text{(Д)}.$$



40. Ивицу дате коцке означимо са $a = 2$. Раван одређена тачкама P, Q и R сече ивице коцке C_1D_1, D_1A_1 и A_1A у тачкама које се налазе на средини тих ивица, тако да је пресек коцке и равни правилан шестоугао ивице b, при чему је, нпр. из правоуглог троугла PBQ, $b^2 = (a/2)^2 + (a/2)^2 = a^2/2$. Тражена површина је

$$P = 6\frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \quad \text{(В)}.$$



Јелена Томановић

jtomanovic@mas.bg.ac.rs