11 Стереометрија (2.5.2020.)

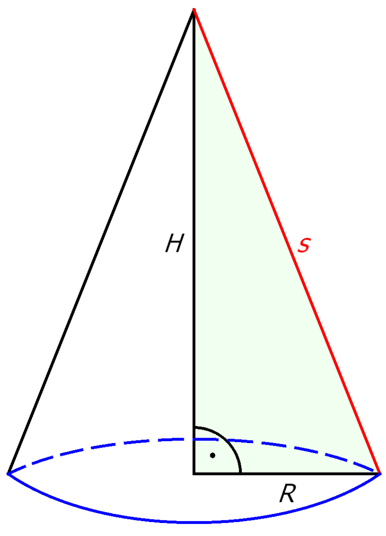
22. Ако је R полупречник дате лопте, онда се њена површина рачуна по формули $P = 4R^2\pi$, а запремина $V = \frac{4}{3}R^3\pi$. На основу датих података је

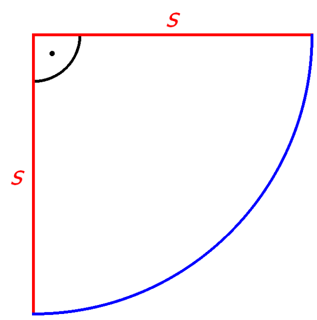
$$4(R + 1cm)^2\pi = 4R^2\pi + 8\pi cm^2,$$

одакле добијамо $R = \frac{1}{2}cm$. То значи да се запремина повећа за

$$\frac{4}{3}(R+1)^3\pi - \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{4}{3}\pi\left(\left(\frac{3}{2}cm\right)^3 - \left(\frac{1}{2}cm\right)^3\right) = \frac{13}{3}\pi cm^3 \quad (\text{Д}).$$

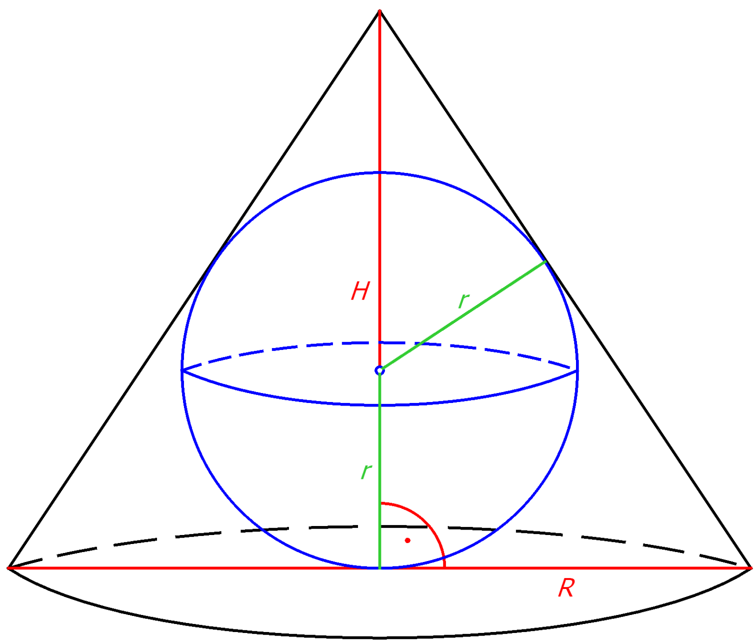
23. Запремину купе полупречника основе R и висине H рачунамо по формули $V = \frac{1}{3}R^2H\pi$. Полупречник четвртине круга која се добија развијањем омотача купе једнак је изводници купе s, тј. $s = 4\sqrt{5}$. Дужина лука те четвртине круга једнака је обиму основе, па је $\frac{1}{4} \cdot 2s\pi = 2R\pi$, одакле следи $R = \sqrt{5}$. За висину важи $H^2 = s^2 - R^2$, па имамо $H = 5\sqrt{3}$. Коначно је $V = \frac{1}{3}\sqrt{5}^2 \cdot 5\sqrt{3}\pi = \frac{25\pi\sqrt{3}}{3}$ (Г).





24. Нека је H висина, а R полупречник основе купе. Полупречник уписане лопте означимо са r. Тада је запремина лопте $V_L = \frac{4}{3}r^3\pi$, а запремина купе $V_K = \frac{1}{3}R^2H\pi$. Ивица једнакостраничног троугла који је осни пресек купе износи $2R$. Центар круга уписаног у тај троугао (који је истовремено и центар лопте уписане у купу) налази се у пресеку висина троугла и дели висину у односу $2:1$, одакле је $H = 3r$. При том је и $H = \frac{2R\sqrt{3}}{2}$, па следи $R = \frac{H}{\sqrt{3}} = r\sqrt{3}$. На крају имамо

$$\frac{V_L}{V_K} = \frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{\frac{1}{3}R^2H\pi} = \frac{4r^3}{R^2H} = \frac{4r^3}{(r\sqrt{3})^2\cdot 3r} = \frac{4}{9} \quad \text{(Б).}$$

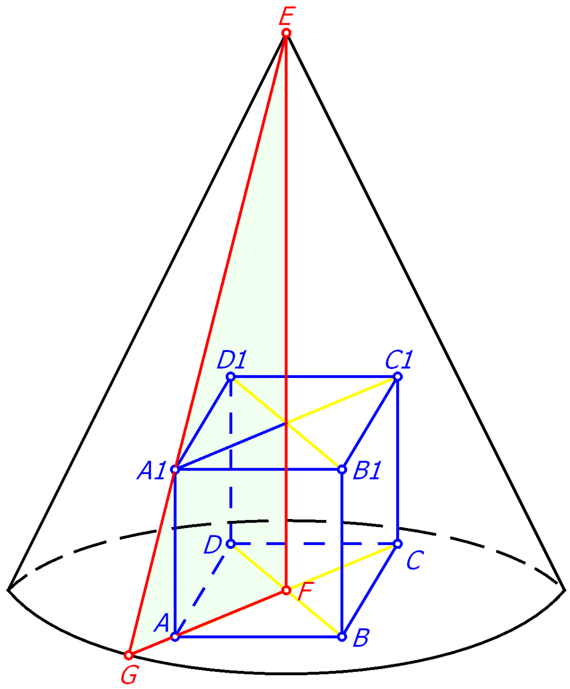


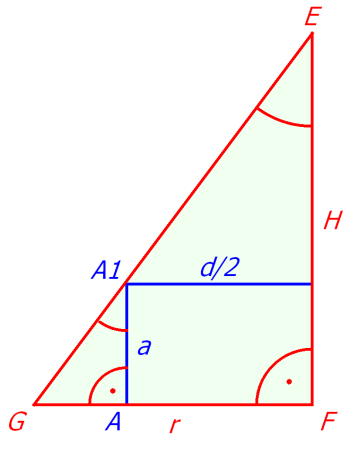
25. Запремина купе полупречника основе r и висине $H = r\sqrt{2}$ износи $V_{\text{купа}} = \frac{1}{3}r^2H\pi = \frac{1}{3}r^3\pi\sqrt{2}$. Ако са a означимо ивицу уписане коцке, онда је $V_{\text{коцка}} = a^3$. Како бисмо одредили тражени однос запремина, треба да изразимо нпр. a преко r. Нека је E врх купе, а F подножје висине купе - оно се налази у пресеку дијагонала квадрата $ABCD$ и полови дијагоналу d. Са G означимо тачку на рубу основе купе такву да је $|FG| = r$ полупречник основе купе који садржи тачку A (напоменимо да тачке A, B, C и D не припадају рубу основе купе, тј. нису на кружници, већ негде унутар круга, па би било погрешно закључити да је $d/2 = r$). Из сличности троуглова EFG и A_1AG следи

$$H : r = a : (r - d/2).$$

Како је $d = a\sqrt{2}$ из претходне једнакости добијамо $a = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Однос запремина купе и коцке је

$$\frac{V_{\text{купа}}}{V_{\text{коцка}}} = \frac{\frac{r^3\pi\sqrt{2}}{3}}{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^3} = \frac{4\pi}{3} \quad \text{(A)}.$$

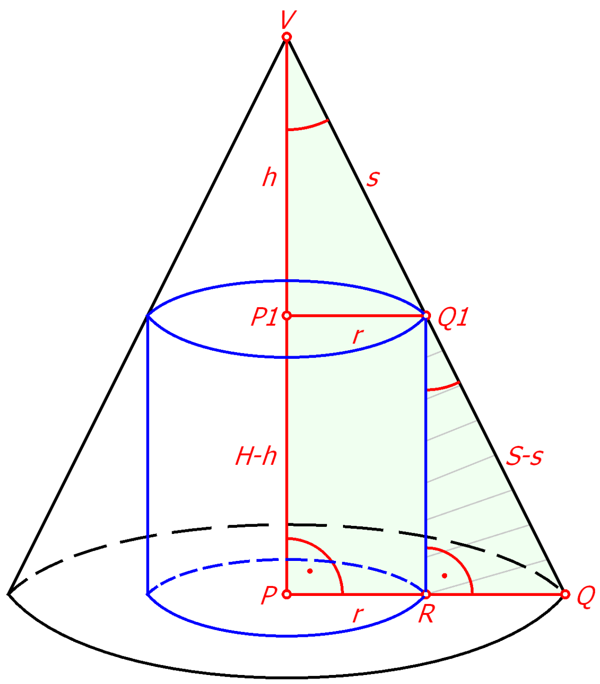




26. Изводницу дате купе означимо са $S = 10cm$, а висину са $H = 8cm$. Нека је s изводница, а h висина купе изнад ваљка. Тада је висина ваљка $H - h$. Ако са r означимо полупречник основе ваљка (који је истовремено и полупречник основе купе изнад ваљка), онда је површина омотача ваљка $M_V = 2r\pi(H-h)$, а површина омотача купе изнад ваљка $M_K = rs\pi$. Како је дато $M_V = M_K$, следи $2(H - h) = s$. Нека је V врх (обе) купе, P подножје висине H, а P_1 подножје висине h. Нека је Q тачка на рубу основе купе висине H, Q_1 тачка на рубу основе купе висине h која припада дужи VQ, а R тачка на рубу „доње" основе ваљка која припада дужи PQ. Из сличности троуглова VPQ и Q_1RQ следи

$$\frac{S-s}{H-h} = \frac{S}{H} = \frac{5}{4}.$$

Ако у претходној једнакости заменимо $s = 2(H - h)$, добијамо да је висина ваљка $H - h = \frac{40}{13}cm$ (B).

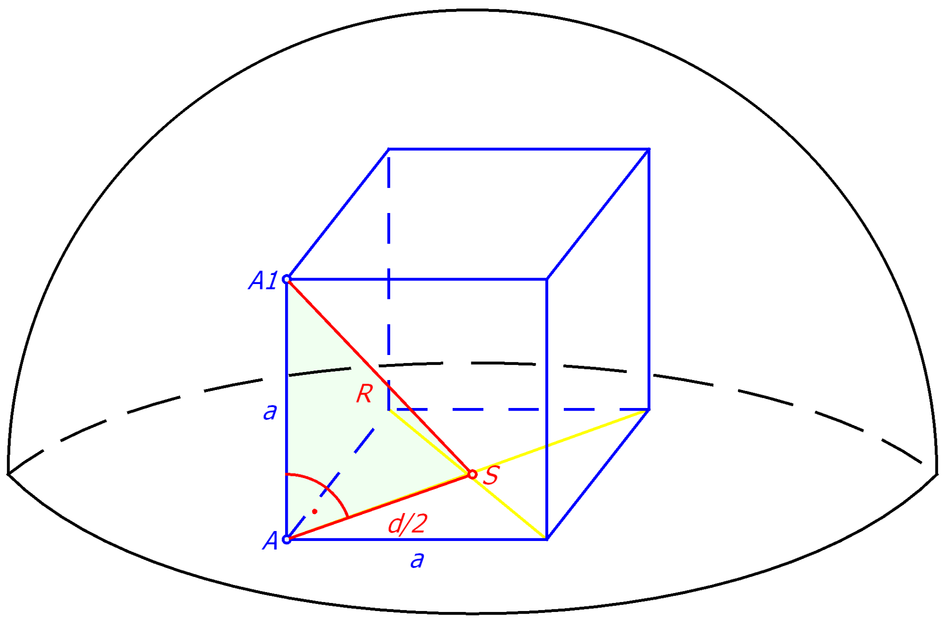


27. Полупречник дате полулопте означимо са R, а ивицу у њу уписане коцке са a. Нека је A једно теме коцке које припада основи полулопте, A_1 теме коцке које припада површи полулопте такво да је $|AA_1| = a$, и нека је S центар полулопте. Тада је $|SA| = d/2$, где је са d означена дијагонала стране коцке. Из правоуглог троугла SAA_1 имамо

$$R^2 = a^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}a^2,$$

одакле је $R = a\sqrt{3/2}$. Следи да је однос запремине полулопте V_L и запремине коцке V_K једнак

$$\frac{V_L}{V_K} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}R^3\pi}{a^3} = \frac{\frac{2}{3}\left(a\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3\pi}{a^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \text{(Д).}$$



28. Нека је H висина, s изводница, а R полупречник основе дате купе. Тражену површину рачунамо по формули $P = R(R+s)\pi$. Са S означимо центар лопте уписане у купу, са V врх купе, а са P подножје висине H. Нека је A једна тачка са руба основе купе, и нека је Q тачка у којој лопта додирује омотач купе и која се налази на дужи VA. Тада је $|SQ| = r$. Из сличности троуглова VPA и VQS имамо

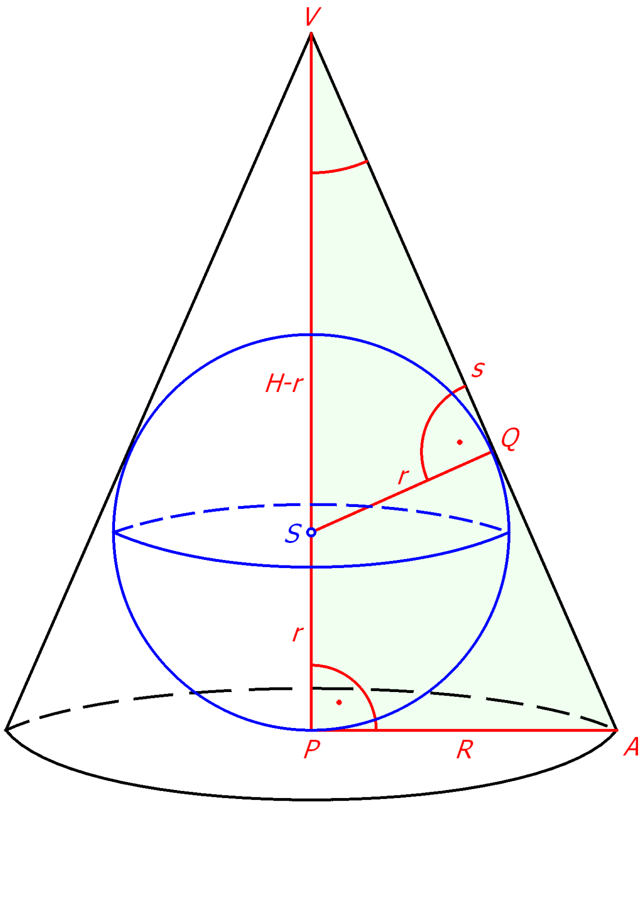
$$\frac{s}{R} = \frac{H-r}{r} = 3,$$

јер је на основу датих података $H = 4r$, па следи $s = 3R$. Из правоуглог троугла VPA је

$$s^2 = H^2 + R^2,$$

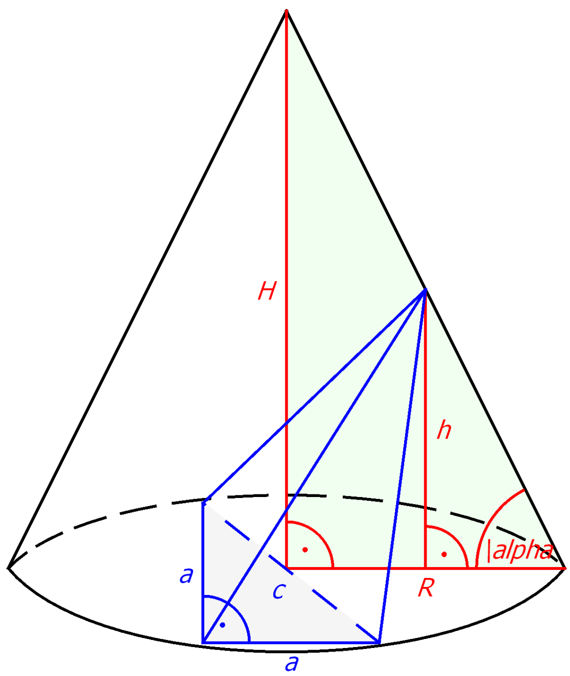
у шта кад заменимо $H = 4r$ и $s = 3R$, добијамо $R = r\sqrt{2}$, а затим и $s = 3r\sqrt{2}$. Сада је површина

$$P = r\sqrt{2}(r\sqrt{2} + 3r\sqrt{2})\pi = 8r^2\pi \quad \text{(Д)}.$$



29. Задатак није исправно постављен, па га прескачемо.

30. Нека је $H = 6cm$ висина, R полупречник основе, а $\alpha = 60^\circ$ угао који изводница заклапа са равни основе дате купе. Ако са h означимо висину уписане пирамиде, а са a и c редом катете и хипотенузу основе пирамиде, онда је тражена запремина $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} h$. На онову датих података је $h = H/2 = 3cm$. Како је $c^2 = 2a^2$, а с обзиром да се центар круга описаног око правоуглог троугла налази на средини хипотенузе, то је $c = 2R$, па следи $a^2 = 2R^2$. Приметимо да је $\mathrm{tg}\alpha = H/R$, одакле је $R = H/\mathrm{tg}\alpha = 2\sqrt{3}cm$. Стога је $a^2 = 24cm^2$ и добијамо $V = \frac{1}{6} 24cm^2 \cdot 3cm = 12cm^3$ (Д).



31. Нека је H заједничка висина пирамиде и купе, нека је a ивица шестоугла који је основа пирамиде, и нека је R полупречник основе купе. Тражена запремина износи $V = \frac{1}{3}R^2H\pi$. Означимо са A, B, C, D, E и F темена основе пирамиде, са K заједнички врх пирамиде и купе, а са L подножје висине H. Како је троугао BCL једнакостраничан, то је $R = a$. На основу косинусне теореме примењене на троугао ABK, имамо

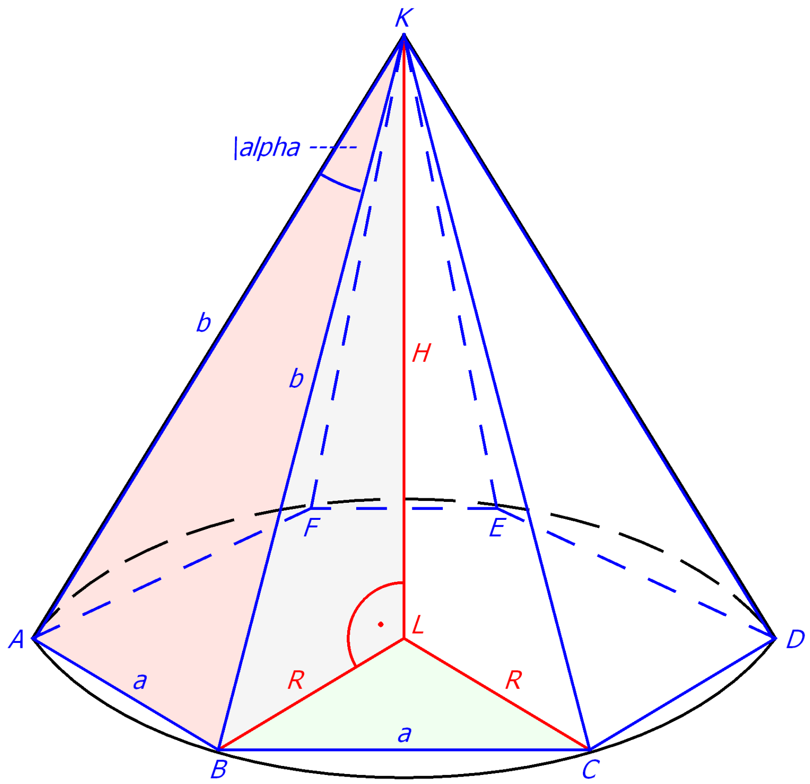
$$a^2 = b^2 + b^2 - 2bb\cos\alpha = 2b^2(1-\cos\alpha),$$

односно $R^2 = 2b^2(1-\cos\alpha)$. Из правоуглог троугла KLB следи

$$H^2 = b^2 - R^2 = b^2 - 2b^2(1-\cos\alpha) = b^2(2\cos\alpha - 1),$$

па је $H = b\sqrt{2\cos\alpha - 1}$. Коначно је

$$V = \frac{1}{3}2b^2(1-\cos\alpha)b\sqrt{2\cos\alpha-1}\pi = \frac{2}{3}\pi b^3(1-\cos\alpha)\sqrt{2\cos\alpha-1} \quad (\Gamma).$$



Јелена Томановић
jtomanovic@mas.bg.ac.rs