11 Стереометрија (25.4.2020.)

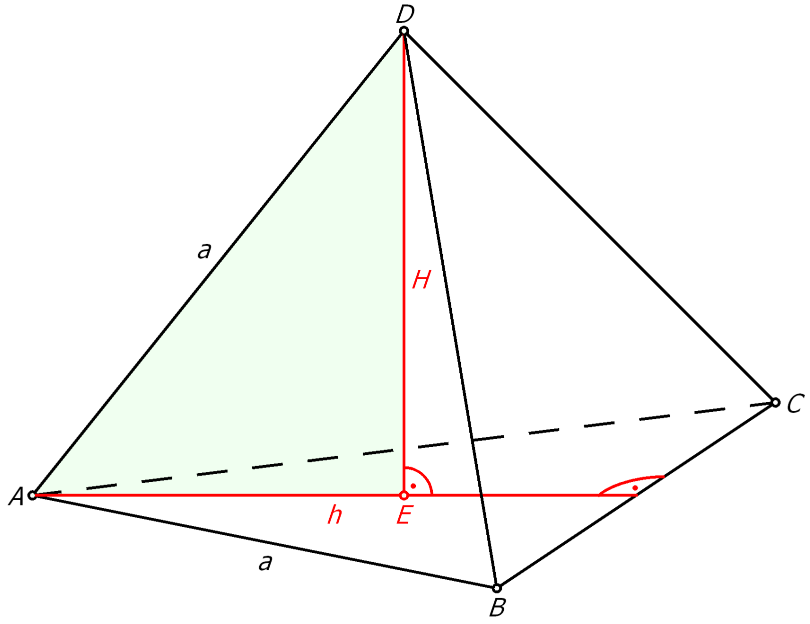
10. Правилни тетраедар можемо посматрати као тространу пирамиду чије су све ивице једнаке. Означимо темена датог тетраедра са A, B, C и D, а његову ивицу са a. Тражену запремину рачунамо као

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{B}H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}H,$$

где је са H означена висина тетраедра из врха D на базу $\mathcal{B} = ABC$. Подножје E висине H налази се у пресеку висина базе, па висину базе h из темена A на ивицу BC дели у односу 2:1. Из правоуглог троугла AED по Питагориној теореми имамо

$$H = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3}h\right)^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}},$$

па је $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Како је дато $V = 48\sqrt{2}\ cm^3$, добијамо $a = 4\sqrt[3]{9}\ cm$ (Б).



11. Темена базе $\mathcal{B}$ дате пирамиде означимо са A, B и C, а врх са D. Нека је a ивица базе, b бочна ивица, H висина пирамиде, h_a висина основе из темена A на ивицу BC, а h_b висина бочне стране из темена D на ивицу BC. Са E означимо подножје висине H (које представља центар основе и дели висину h_a у односу 2:1), са F подножје висине h_a (које је истовремено и подножје висине h_b), и нека је G ортогонална пројекција тачке E на бочну страну BCD. Тачка G припада висини h_b. Запремину дате пирамиде рачунамо као

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{B}H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}H = \frac{1}{12}Ha^2\sqrt{3}.$$

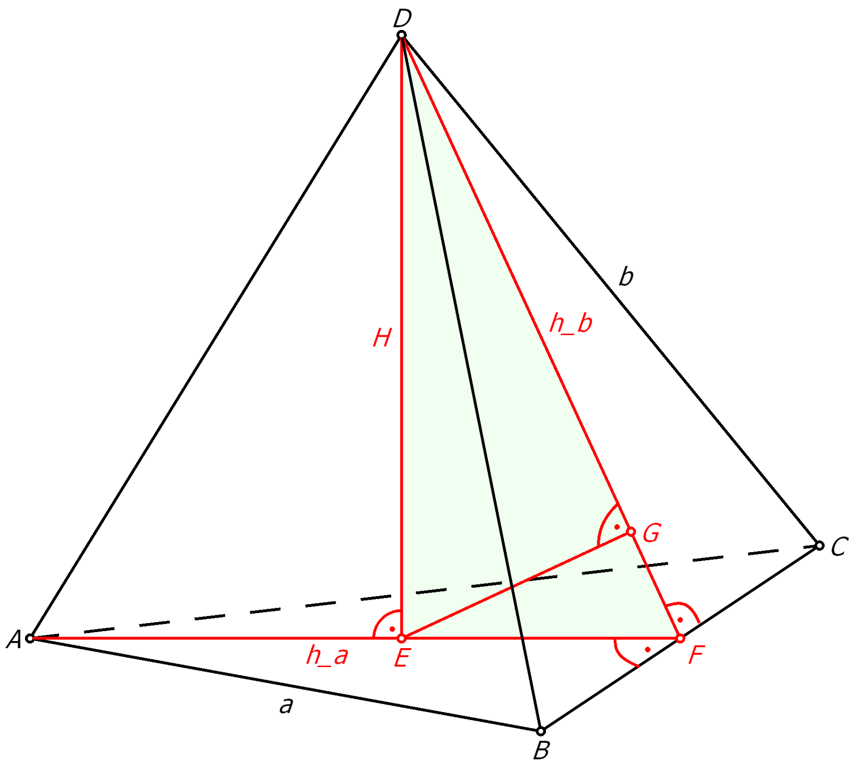
Уочимо троугао EFD. Његову површину можемо рачунати на два начина:

$$P_{EFD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}h_a H \quad \text{и} \quad P_{EFD} = \frac{1}{2}h_b|EG|,$$

одакле је

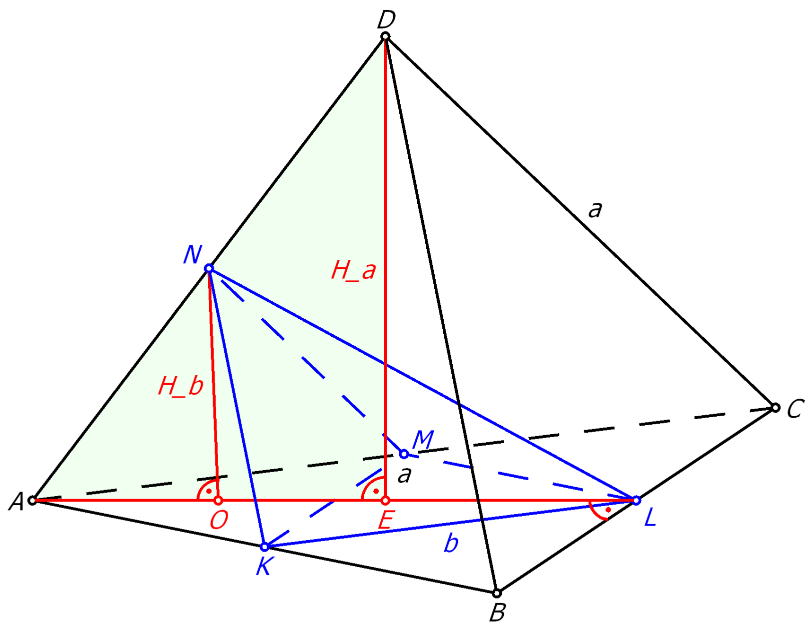
$$\frac{1}{3}h_a H = h_b|EG|. \tag{1}$$

Важи $h_a = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, а из $P_{BCD} = \dfrac{1}{2}ah_b$ имамо $h_b = \dfrac{2 \cdot 75\ cm^2}{a} = \dfrac{150\ cm^2}{a}$. Заменом $|EG| = 8\ cm$ и овако изражених h_a и h_b у (1), добијамо $Ha^2\sqrt{3} = 7200\ cm^3$. Стога је $V = 600\ cm^3$ (A).



12. База $\mathcal{B} = KLM$ пирамиде $KLMN$ је једнакостраничан троугао ивице $b = a/2$ (јер нпр. KL представља средњу линију троугла ACB). Ако са H_a означимо висину пирамиде $ABCD$ из врха D на базу ABC, а са H_b висину пирамиде $KLMN$ из врха N на базу KLM, онда је $H_b = H_a/2$ (ако са E означимо подножје висине H_a, а са O подножје висине H_b, онда из сличности троуглова AED и AON и с обзиром да је $|AD| : |AN| = 2 : 1$, следи $H_a : H_b = 2 : 1$). У 10. задатку смо видели да је $H_a = a\sqrt{2/3}$, па имамо

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{B}H_b = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{H_a}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{96} \quad \text{(B)}.$$



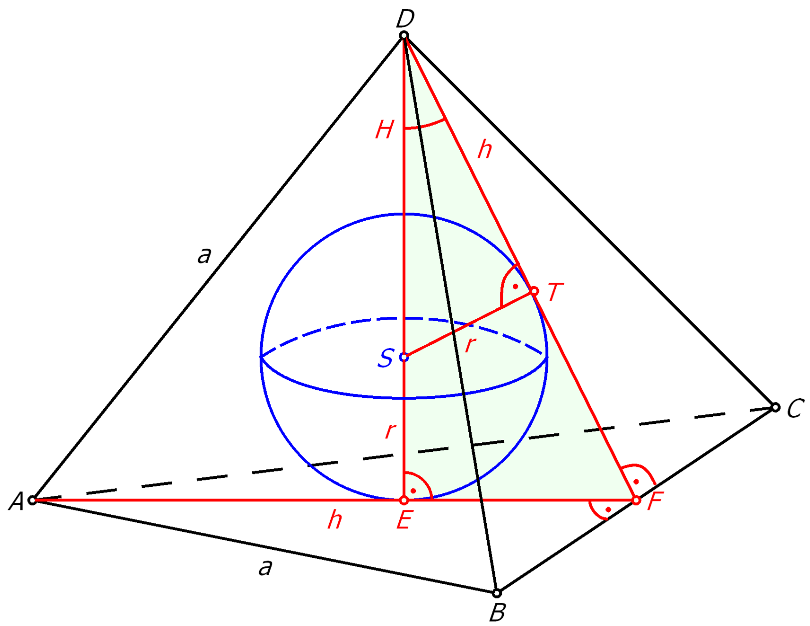
13. Темена датог правилног тетраедра означимо са A, B, C и D, а његову ивицу са a. Нека је E подножје висине тетраедра H из врха D на базу ABC и нека је F подножје висине базе h из темена A на ивицу BC. При том E дели AF у односу 2:1, а важи и $|DF| = h$. Са S означимо центар лопте уписане у дати тетраедар. Уписана лопта базу ABC додирује у тачки E, а тачку у којој додирује бочну страну BCD означимо са T. Тачка T представља ортогоналну пројекцију тачке S на раван BCD и припада дужи DF. Ако је r полупречник уписане лопте, онда је $r = |SE| = |ST|$. Приметимо да су троуглови EFD и TSD слични, јер оба имају по један прав угао и заједнички угао код темена D. Стога је

$$|EF| : |FD| = |TS| : |SD|. \tag{2}$$

Приметимо да је $|EF| = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $|FD| = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $|TS| = r$, а како смо у 10. задатку видели да је $H = a\sqrt{2/3}$ и како је $|SE| = r$, имамо $|SD| = H - r = a\sqrt{2/3} - r$. Сада једнакост (2) можемо записати као

$$\frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = r : \left(a\sqrt{\frac{2}{3}} - r\right),$$

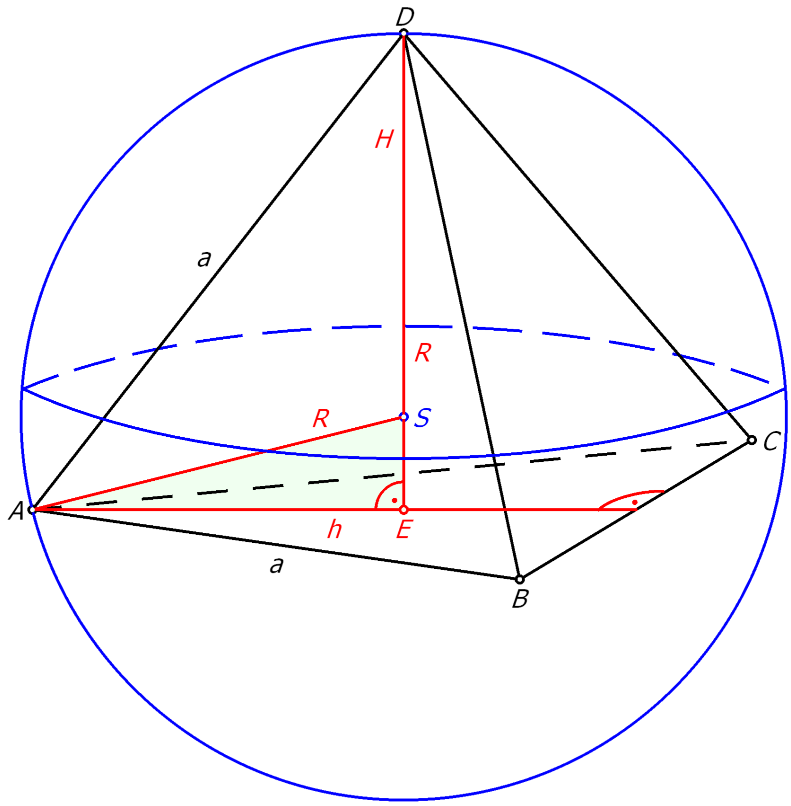
одакле је $r = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$. У 10. задатку смо добили да је запремина $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, а како је дато $V = 144\sqrt{2}$, следи $a = 12$. Стога је $r = 3\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6}$ (Б).



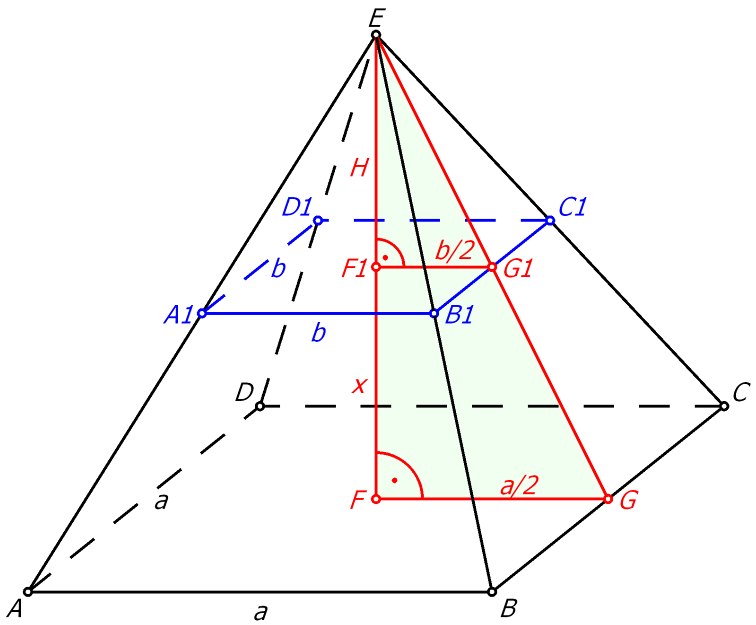
14. Нека су A, B, C и D темена, а a ивица датог тетраедра. У 13. задатку смо установили да правилни тетраедар запремине $V = 144\sqrt{2}$ има ивицу $a = 12$. Нека је H висина тетраедра из врха D на базу ABC, са подножјем E, и нека је h висина базе из темена A на ивицу BC (при чему E дели h у односу 2:1). На основу 10. задатка је $H = a\sqrt{2/3}$. Ако са S означимо центар лопте описане око датог тетраедра (та лопта садржи темена A, B, C и D), а са R њен полупречник, онда је $R = |SA| = |SD|$. Из правоуглог троугла AES по Питагориној теореми имамо $|SA|^2 = |AE|^2 + |ES|^2$, односно

$$R^2 = \left(\frac{2}{3}h\right)^2 + (H-R)^2 = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{\frac{2}{3}} - R\right)^2 = a^2 - 2aR\sqrt{\frac{2}{3}} + R^2,$$

одакле је $2aR\sqrt{2/3} = a^2$, односно $R = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = 6\sqrt{3/2} = 3\sqrt{6}$ (A).



15. Нека су A, B, C и D темена основе, а E врх дате пирамиде. Раван паралелна основи од дате пирамиде одсеца мању пирамиду чији је врх E и чија је основа квадрат ивице b са теменима A_1, B_1, C_1 и D_1. Површина основе мање пирамиде је тражена површина пресека и износи $P = b^2$. Са F означимо подножје висине H, са F_1 подножје висине мање пирамиде, нека је G средиште ивице BC, а G_1 средиште ивице B_1C_1. Приметимо да је $|FG| = a/2$, а $|F_1G_1| = b/2$. Из сличности троуглова EFG и EF_1G_1 имамо $|EF| : |FG| = |EF_1| : |F_1G_1|$, односно $H : \frac{a}{2} = (H-x) : \frac{b}{2}$, одакле је $b = \frac{a(H-x)}{H}$, па је $P = a^2\frac{(H-x)^2}{H^2}$ (Д).



16. Нека је a ивица основе, а h висина бочне стране дате пирамиде (у општем случају је $h \neq \frac{a\sqrt{3}}{2}$). Ако са $\mathcal{B}$ означимо базу, а са $\mathcal{M}$ омотач, онда је тражена површина

$$P = \mathcal{B} + \mathcal{M} = a^2 + 4\frac{ah}{2} = a^2 + 2ah.$$

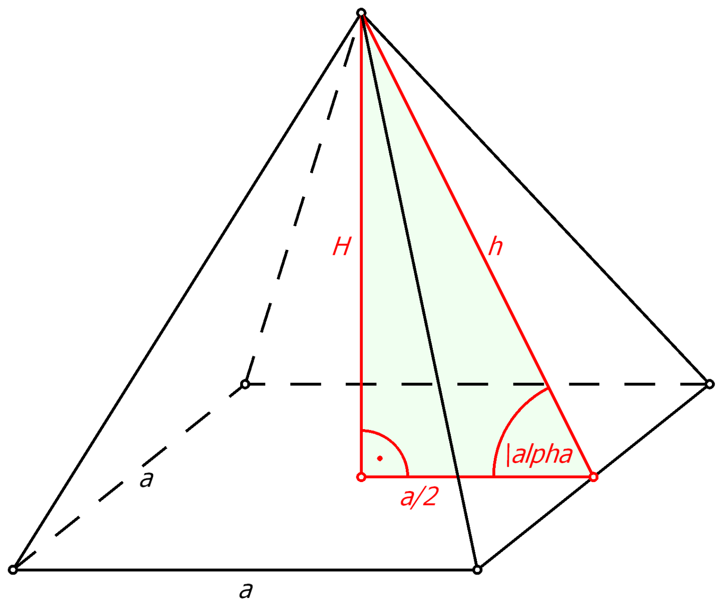
Угао између бочне стране и основе означимо са α. Приметимо да је растојање између подножја висине пирамиде H и ивице основе једнако $a/2$. Тада је

$$\frac{4}{3} = \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{H}{h}}{\frac{a/2}{h}} = \frac{2H}{a},$$

одакле је $a = \frac{3H}{2} = 3\,cm$. По Питагориној теорми имамо

$$h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\,cm,$$

па је $P = 24\,cm^2$ (није међу понуђеним одговорима).

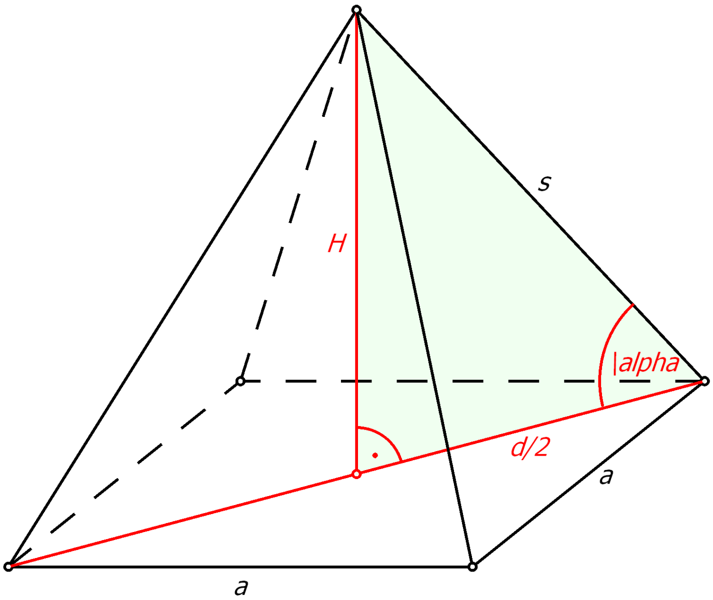


17. Ивицу основе $\mathcal{B}$ дате пирамиде означимо са a, дијагоналу основе са d, а висину пирамиде са H. Подножје висине H пада у пресек дијагонала основе и полови дијагоналу основе. Тражену запремину рачунамо као

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{B}H = \frac{1}{3}a^2H.$$

Како је $\sin\alpha = \dfrac{H}{s}$, имамо $H = s\sin\alpha$, а из $\cos\alpha = \dfrac{d/2}{s}$ следи $d = 2s\cos\alpha$. Дијагоналу квадрата изражавамо преко ивице као $d = a\sqrt{2}$, па је $a = \dfrac{d}{\sqrt{2}} = s\sqrt{2}\cos\alpha$. Стога је

$$V = \frac{1}{3}(s\sqrt{2}\cos\alpha)^2 s\sin\alpha = \frac{2}{3}s^3\sin\alpha\cos^2\alpha \quad \text{(A)}.$$

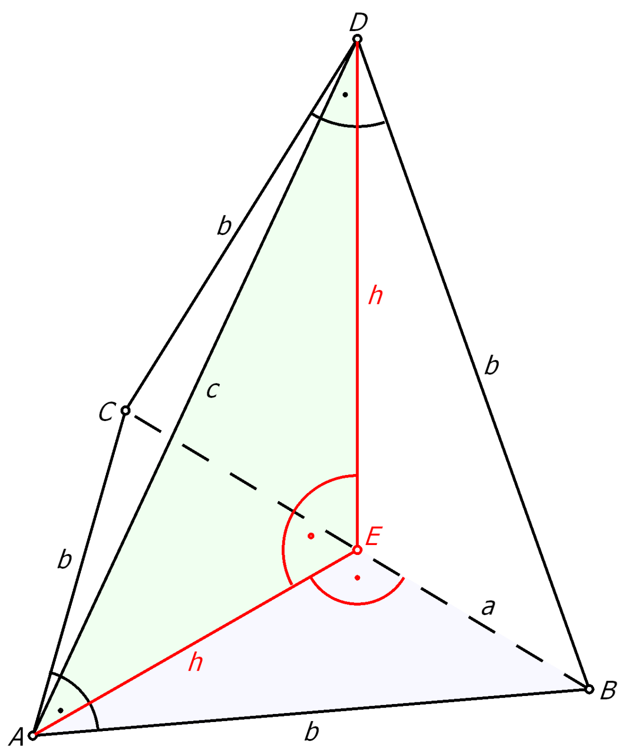


18. Темена основе дате пирамиде означимо са A, B и C, а њен врх са D. Нека је ивица основе $BC = a$ хипотенуза, а ивице основе $AB = AC = b$ катете једнакокрако-правоуглог троугла. Због подударности бочне стране са основом за бочне ивице важи $BD = CD = b$, а нека је бочна ивица $AD = c$. Тражена површина је

$$P = P_{ABC} + P_{BCD} + P_{ABD} + P_{ACD} = 2P_{ABC} + 2P_{ABD}.$$

Важи $P_{ABC} = \dfrac{b^2}{2}$, а како је $a^2 = 2b^2$, то је $P_{ABC} = \dfrac{a^2}{4}$. Нека је h висина основе из темена A на ивицу BC са подножјем E, при чему E полови BC. Тада је и висина DE бочне стране BCD (која представља и висину пирамиде) такође једнака h. Из правоуглог троугла ADE имамо $c^2 = 2h^2$, а из правоуглог троугла ABE је $h^2 = b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{4}$, па је $c = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Како из $a^2 = 2b^2$ следи $b = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ видимо да је $b = c$, што значи да је троугао ABD једнакостраничан, па је његова површина $P_{ABD} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Коначно је

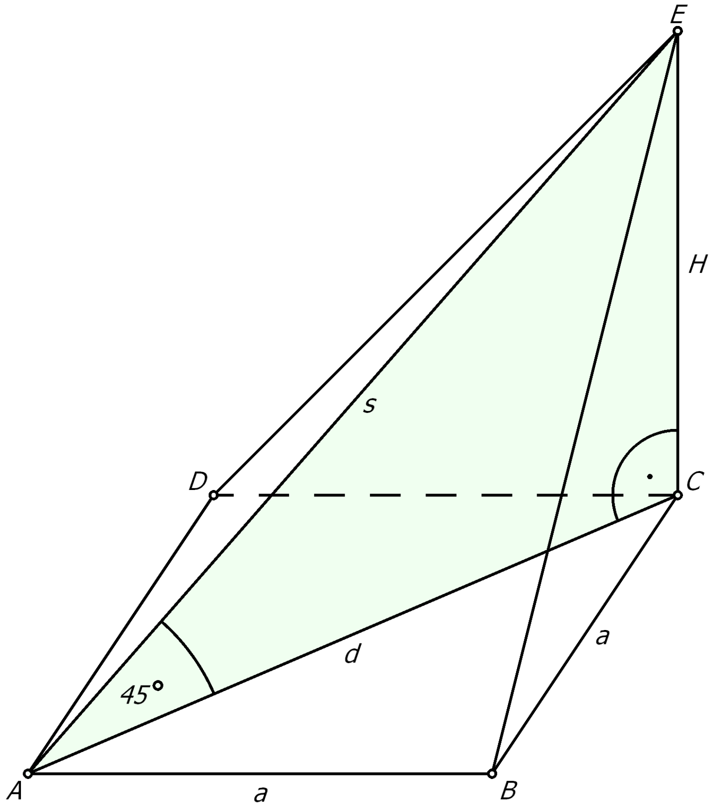
$$P = 2\frac{a^2}{4} + 2\frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{a^2}{4}(2 + \sqrt{3}). \quad \text{(Б)}$$



19. Нека су A, B, C и D темена основе $\mathcal{B}$, а E врх дате пирамиде. Ивицу основе означимо са a, а дијагоналу основе са d. Ако је CE бочна ивица нормална на раван основе, онда је висина основе $H = |CE|$. Најдужу бочну ивицу означимо са s, при чему је $|AE| = s = 8$. Тражену запремину рачунамо као

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{B}H = \frac{1}{3}a^2 H.$$

Како је ACE једнакокрако-правоугли троугао, то је $H = d$ и $s^2 = H^2 + d^2$, па је $H = d = \dfrac{s}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$. С обзиром да је $d^2 = 2a^2$, имамо $a = \dfrac{d}{\sqrt{2}} = 4$. На основу добијених вредности је $V = \dfrac{64}{3}\sqrt{2}$ (Б).



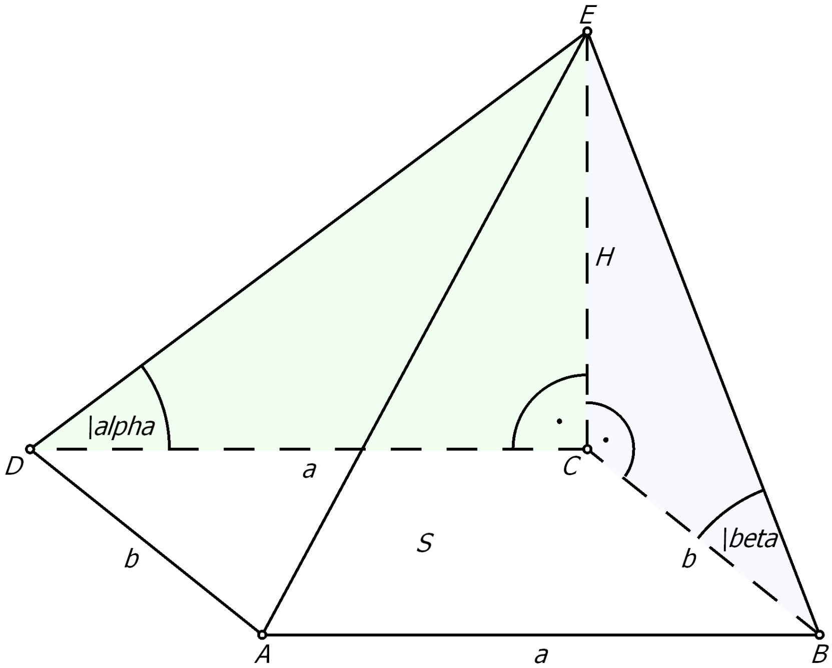
20. Темена основе $\mathcal{B}$ дате пирамиде означимо са A, B, C и D, а њен врх са E. Нека су стране BCE и CDE нормалне на основу, нека страна ADE са основом заклапа угао α, и нека страна ABE са основом заклапа угао β. Са a и b означимо ивице основе ($a = |AB|$, $b = |BC|$), а са H висину пирамиде, при чему је $H = |CE|$. Запремину дате пирамиде рачунамо као

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{B}H = \frac{1}{3}SH.$$

Из правоуглог троугла CDE је $\mathrm{tg}\alpha = H/a$, док је из правоуглог троугла BCE $\mathrm{tg}\beta = H/b$. Како је $ab = S$, то је

$$\mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{tg}\beta = \frac{H}{a} \cdot \frac{H}{b} = \frac{H^2}{S},$$

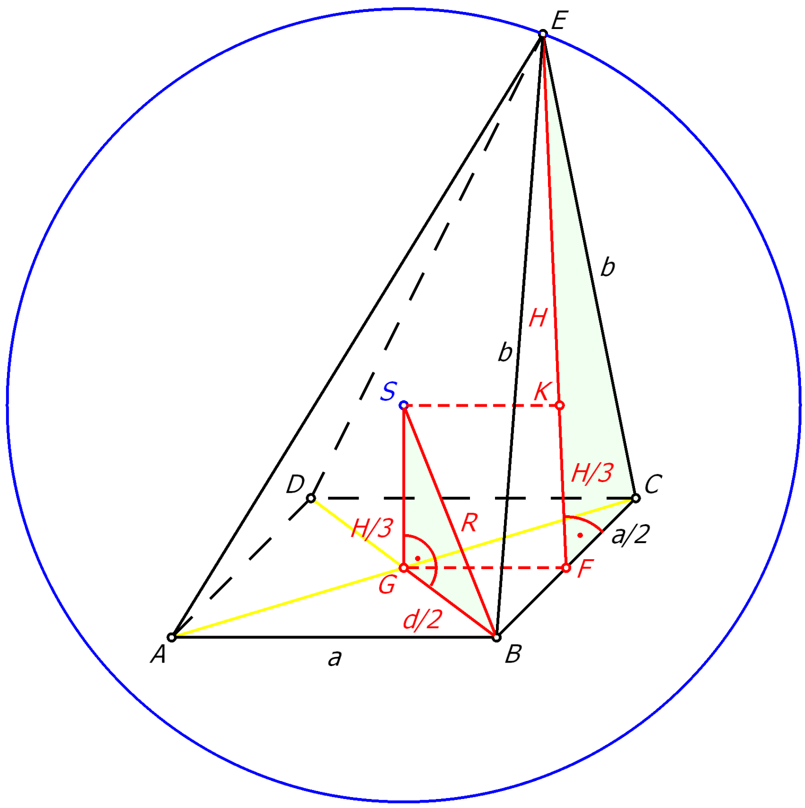
одакле је $H = \sqrt{S\mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{tg}\beta}$. Следи $V = \frac{1}{3}S\sqrt{S\mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{tg}\beta}$ (В).



21. Нека су A, B, C и D темена основе, а E врх дате пирамиде. Са S означимо центар сфере описане око пирамиде, а са R њен полупречник (та сфера садржи тачке A, B, C, D и E). Нека је $a = 2\sqrt{3}\ cm$ ивица основе, нека висина пирамиде $H = 3\ cm$ садржи средиште F ивице BC, и нека је $b = |BE| = |CE|$. Тада је $b^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, одакле је $b = 2\sqrt{3}\ cm$, па закључујемо да је троугао BCE једнакостраничан. Круг описан око троугла BCE припада сфери описаној око пирамиде, а ако са K означимо његов центар, онда је $|KF| = H/3$. Нека је G пресек дијагонала основе. Како је $R = |SA| = |SB| = |SC| = |SD|$, то се центар сфере S налази на правој паралелној висини H која садржи тачку G, при чему је $|SG| = |KF| = H/3$. Из правоуглог троугла BGS имамо $|BS|^2 = |BG|^2 + |GS|^2$, односно

$$R^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{H}{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{H}{3}\right)^2,$$

одакле је $R = \sqrt{7}\ cm$ (B).



Јелена Томановић
jtomanovic@mas.bg.ac.rs