21.03.2020.

Припремна настава за полагање пријемог испита за упис на Машински факултет у Београду

9. Тригонометријске једначине

10. Ако на леву и десну страну једначине

$$\operatorname{arcctg}(x-2) = \operatorname{arcctg}(x-1) + \operatorname{arcctg} x$$

применимо функцију ctg и на десној страни искористимо формулу

$$\operatorname{ctg}(a+b) = \frac{\operatorname{ctg}a \operatorname{ctg}b - 1}{\operatorname{ctg}b + \operatorname{ctg}a}$$

добијамо једначину

$$x - 2 = \frac{(x-1)x - 1}{x + x - 1}, \quad \text{тј.} \quad x^2 - 4x + 3 = 0,$$

чија су решења $x = 1$ и $x = 3$. Провером утврђујемо да су то заиста решења полазне једначине, па је збир решења једнак 4.

11. Приметимо прво да је

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg}x + 1}{1 - \operatorname{tg}x}.$$

Дакле, полазна једначина се трансформише у једначину

$$\frac{\operatorname{tg}x + 1}{1 - \operatorname{tg}x} - 2\operatorname{tg}x = 2,$$

чијим множењем са $1 - \operatorname{tg}x$ добијамо квадратну једначину

$$2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}x - 1 = 0$$

по $\operatorname{tg}x$. Њена решења су

$$\operatorname{tg}x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

па је $\operatorname{tg}x = \frac{1}{2}$ или је $\operatorname{tg}x = -1$. Како је услов задатка био $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то је $\operatorname{tg}x > 0$. Следи да је $\operatorname{tg}x = \frac{1}{2}$.

Да бисмо нашли $\sin^2 x$, посматрајмо

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{4}.$$

Дакле, $5\sin^2 x = 1$, па је $\sin^2 x = 0,2$.

12. У једначини $\sqrt{3\cos^2 x - \sin 2x} = -\sin x$ видимо да је $\sin x < 0$ (јер је корен на левој страни ненегативан и $\sin x = 0$ очигледно није решење). Дакле, у интервалу $[0, 3\pi]$ решења једначине су у $(\pi, 2\pi)$.

Ако квадрирамо полазну једначину и приметимо да је

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 3\sin x \cos x - \sin x \cos x,$$

добијамо једначину

$3\cos^2 x - 3\sin x\cos x + \sin x\cos x - \sin^2 x = 0$, тј. $3\cos x(\cos x - \sin x) + \sin x(\cos x - \sin x) = 0$.

Следи да је $(\cos x - \sin x)(3\cos x + \sin x) = 0$, па је $\mathrm{tg}x = 1$ или је $\mathrm{tg}x = -\frac{1}{3}$. Коначно, у интервалу $(\pi, 2\pi)$ оваквих решења има укупно два.

13. Ако искористимо чињеницу да је $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, наша једначина постаје

$$\cos x\sin x + 2\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

чијом деобом са $\cos^2 x$ (у интервалу $[0, \frac{\pi}{2})$ је $\cos x \neq 0$) добијамо да је

$$\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}x - 1 = 0, \quad \text{тј.} \quad \mathrm{tg}x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

У интервалу $[0, \frac{\pi}{2})$ је $\mathrm{tg}x \geqslant 0$, па је $\mathrm{tg}x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

14. Ако применимо формулу

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

на последња два сабирка не левој страни полазне једначине, добијамо једначину

$$\cos x + 2\cos 3x\cos x = 0, \quad \text{тј.} \quad \cos x(1 + 2\cos 3x) = 0.$$

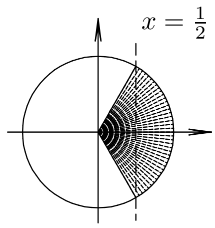
Дакле, треба да буде $\cos x = 0$ или $\cos 3x = -\frac{1}{2}$. Ако је $\cos x = 0$, тада је $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), па су таква позитивна решења $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots$. Ако је $\cos 3x = -\frac{1}{2}$, тада је $\cos 3x = \cos\frac{2\pi}{3}$, па је $3x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Следи да је $x = \frac{2}{3}\pi\left(k \pm \frac{1}{3}\right)$, па су таква позитивна решења $\frac{2}{9}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi, \frac{10}{9}\pi, \ldots$. Коначно, четири најмања позитивна решења су $\frac{2}{9}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{8}{9}\pi$, а њихов збир је $\frac{37}{18}\pi$.

15. Применом формуле за котангенс двоструког угла, наша једначина постаје

$$\mathrm{ctg}^2 x + \left(\frac{\mathrm{ctg}^2 x - 1}{2\mathrm{ctg}x}\right)^2 = a, \quad \text{тј.} \quad 5\mathrm{ctg}^4 x - (4a+2)\mathrm{ctg}^2 x + 1 = 0.$$

Ова једначина ће имати тачно једно решење у интервалу $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ако и само ако је њена дискиминанта једнака нули и $4a + 2 > 0$. Приметимо још да a не може бити негативно (јер је једнако збиру квадрата). Следи да је $16a^2 + 16a + 4 - 20 = 0$, тј. $a^2 + a - 1 = 0$, одакле је $a = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Дакле, $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

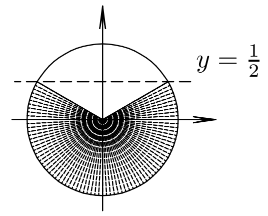
16. Ако је $\cos x = \frac{1}{2}$, тада је $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$, па је према слици у датом интервалу $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$ за $x \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$.



17. Пошто је по формули за косинус двоструког угла $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$, полазна неједначина се своди на неједначину

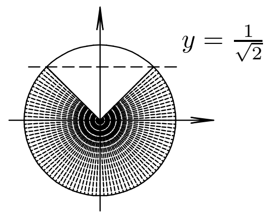
$$2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 \leqslant 0, \quad \text{тј.} \quad (2\sin 2x - 1)(\sin 2x + 1) \leqslant 0,$$

па је $\sin 2x \leqslant \frac{1}{2}$ (јер је $\sin 2x + 1 \geqslant 0$). Ако је $\sin 2x = \frac{1}{2}$, тада је $\sin 2x = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6}$. На основу слике следи да је $\sin 2x \leqslant \frac{1}{2}$ за $2x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right)$. Коначно, у интервалу $[0,\pi)$ скуп решења је $x \in \left[0, \frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{12}, \pi\right)$.



18. Дељењем полазне неједначине са $\sqrt{2}$ и уочавањем да је $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, добијамо

$$\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \sin\frac{\pi}{4} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{тј.} \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Следи да је $x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$, па је $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup (\pi, 2\pi)$.

19. Приметимо да је функција на левој страни неједначине дефинисана за $x \neq -10$. Даље, знамо да је $\mathrm{arctg}a + \mathrm{arctg}\frac{1}{a} = \frac{\pi}{2}$ за $a > 0$ и $\mathrm{arctg}a + \mathrm{arctg}\frac{1}{a} = -\frac{\pi}{2}$ за $a < 0$, као и да је

$$2\,\mathrm{arctg}a = \mathrm{arctg}\frac{2a}{1-a^2}, \quad \text{за} \quad a^2 < 1.$$

Следи да ће за $x > 0$ полазна нејднакост важити, ако је

$$2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x+10} = \mathrm{arctg}\frac{2(x+10)}{(x+10)^2-1} < \mathrm{arctg}\frac{1}{x}.$$

Како је $\mathrm{arctg}x$ растућа функција, треба да важи

$$\frac{2(x+10)}{(x+10)^2-1} < \frac{1}{x}, \quad \text{тј.} \quad x^2 - 99 < 0,$$

па је $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Даље, за $x < 0$ ($x \notin \{-9, -11\}$) треба да важи

$$\frac{2(x+10)}{(x+10)^2-1} > \frac{1}{x}, \quad \text{тј.} \quad \frac{x^2-99}{x(x+9)(x+11)} > 0.$$

Знак леве стране претходне неједначине дат је у наредној табели.

x		-11		$-3\sqrt{11}$		-9		0		$3\sqrt{11}$	
x	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$+$	|	$+$
$x+9$	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$+$	|	$+$	|	$+$
$x+11$	$-$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$
x^2-99	$+$	|	$+$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$+$
$\frac{x^2-99}{x(x+9)(x+11)}$	$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$

Следи да су у овом случају решења $x \in \{-8, -7, \ldots, -1\}$. Једноставном провером налазимо и да су и $x = 0$ и $x = -9$ решења, па решења има укупно 19.

20. Полазна неједначина је еквивалентна неједначини

$$\frac{\sin x - \cos x}{2\sin x - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sin x - 1}{2\sin x - 1} \leqslant 0, \quad \text{тј.} \quad \frac{2\cos x - 1}{2\sin x - 1} \geqslant 0.$$

Дакле, треба да важи $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$ и $\sin x > \frac{1}{2}$ или $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ и $\sin x < \frac{1}{2}$.

У првом случају (слика лево) је $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$ за $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ и $\sin x > \frac{1}{2}$ за $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$, па је тада скуп решења $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

У другом случају (слика десно) је $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ за $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ и $\sin x < \frac{1}{2}$ за $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right)$, па је у том случају скуп решења $x \in \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

21. Ако искористимо формулу за синус двоструког угла, добијамо неједначину

$$2\sin^2 x \cos x \sin 3x > 0, \quad \text{тј.} \quad \cos x \sin 3x > 0.$$

Дакле, у интервалу $[0, \pi)$ треба да важи $\cos x > 0$ и $\sin 3x > 0$ или $\cos x < 0$ и $\sin 3x < 0$. У првом случају је

$$\begin{aligned} &\cos x > 0 \quad \text{за} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{и} \\ &\sin 3x > 0 \quad \text{за} \quad 3x \in (0,\pi) \cup (2\pi, 3\pi), \quad \text{тј.} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right), \end{aligned}$$

па је $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$. У другом случају је

$$\begin{aligned} &\cos x < 0 \quad \text{за} \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \qquad \text{и} \\ &\sin 3x < 0 \quad \text{за} \quad 3x \in (\pi, 2\pi), \quad \text{тј.} \quad x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \end{aligned}$$

па је $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$. Дакле, скуп решења неједначине је $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$.

22. Посматрамо две неједначине у интервалу $[0, \pi)$: $\cos x < \cos 2x$ и $\cos 2x < \cos 3x$. Ако у првој неједначини искористимо чињеницу да је $\cos 2x = 2\cos^2 -1$, добијамо неједначину

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 > 0, \quad \text{тј.} \quad (2\cos x + 1)(\cos x - 1) > 0.$$

Приметимо да је $\cos x - 1 \leqslant 0$, па је полазна неједначина еквивалентна са $\cos x < -\frac{1}{2}$, чији је скуп решења $x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$. Друга неједначина се применом формуле

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

своди на

$$\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2} < 0.$$

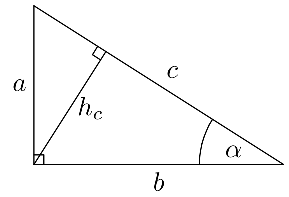
Дакле, треба да важи $\sin\frac{5x}{2} < 0$ и $\sin\frac{x}{2} > 0$ или $\sin\frac{5x}{2} > 0$ и $\sin\frac{x}{2} < 0$. Даље је

$$\begin{aligned} &\sin\frac{5x}{2} < 0 \quad \text{за} \quad \frac{5x}{2} \in (\pi, 2\pi), \quad \text{тј.} \quad x \in \left(\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right) \quad \text{и} \\ &\sin\frac{x}{2} > 0 \quad \text{за} \quad \frac{x}{2} \in (0, \pi), \quad \text{тј.} \quad x \in (0, 2\pi), \end{aligned}$$

па је у овом случају скуп решења $x \in \left(\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right)$. У другом случају неједначина нема решења, јер је $\sin\frac{x}{2} > 0$ за $x \in (0, \pi)$. Коначно, скуп решења обе неједначине је $x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}\right)$.

10. Геометрија у равни

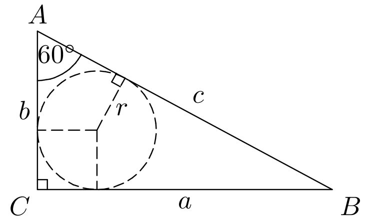
1. Нека су a и b катете правоуглог троугла, c његова хипотенуза и h_c висина на ту хипотенузу. Из услова задатка је $h_c = \frac{c}{4}$. Претпоставимо да је a мања катета и α угао наспрам ње. Тада је



$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} = \frac{c}{4b}, \quad \text{одакле је} \quad \frac{b}{c} = \frac{1}{4\sin\alpha}.$$

Са друге стране је
$$\frac{b}{c} = \cos\alpha.$$
Дакле,
$$\frac{1}{4\sin\alpha} = \cos\alpha, \quad \text{тј.} \quad \sin 2\alpha = \frac{1}{2}.$$
Сада бирамо $2\alpha = 30^\circ$, па је $\alpha = 15^\circ$.

2. Нека је угао код темена C прав и угао код темена A једнак 60°. Ако означимо $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, тада је $a = b\sqrt{3}$ и $c = 2b$, па је обим троугла $O = 3b + b\sqrt{3}$. Даље, на основу познате чињенице $a + b - c = 2r$ је

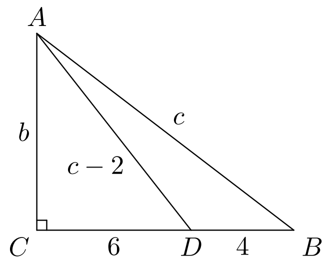


$$b\sqrt{3} + b - 2b = 2r, \quad \text{одакле је} \quad b = \frac{2r}{\sqrt{3}-1} = 2.$$

Дакле, $O = 6 + 2\sqrt{3}$.

3. Нека су a и b катете правоуглог трогла, $c = 5$ његова хипотенуза и $r = 1$ полупречник уписаног круга. Као и у претходном задатку, важи $a + b = c + 2r = 7$.

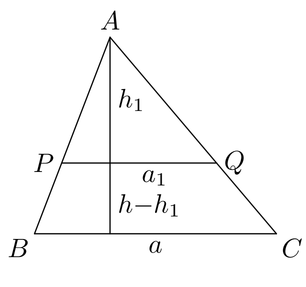
4. Применом Питагорине теореме на правоугле троуглове ACB и ACD редом добијамо једначине



$$b^2 + 10^2 = c^2 \quad \text{и} \quad b^2 + 6^2 = (c-2)^2.$$

Ако од прве једначине одузмемо другу, добијамо $64 = 4c - 4$, одакле је $c = 17$.

5. Нека је a_1=PQ дуж паралелна основи a троугла ABC која дели троугао на два дела једнаких површина и нека су h_1 и h висине троуглова APQ и ABC редом из темена A. Троугао ABC има површину $P = \frac{ah}{2}$, а троугао APQ површину $P_1 = \frac{a_1h_1}{2}$. Троуглови APQ и ABC су слични са коефицијентом k, па је $a_1 = ka$ и $h_1 = kh$. Следи да је $P_1 = k^2P = \frac{P}{2}$, одакле је $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Дакле, $a_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



rmutavdzic@mas.bg.ac.rs